

Министерство образования Российской Федерации
Марийский государственный технический университет

На правах рукописи

Шлычков Сергей Владимирович

**Методика расчета корпусных элементов
музыкальных инструментов**

01.02.06. – Динамика, прочность машин, приборов и
аппаратуры

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель –
доктор технических наук,
профессор Ю.А.Куликов

Оглавление

	Стр.
Перечень сокращений	5
Введение	6
1. Методы исследования музыкальных инструментов	14
1.1. Сведения из истории музыкальной акустики.....	14
1.2. Материалы и конструкции	17
1.3. Обзор исследований динамики тонкостенных конструк- ций 22	
1.4. Расчетные модели и методы исследования	25
1.5. Цели и задачи работы	33
2. Методика расчета корпусных элементов конструкций музыкальных струнных инструментов.....	35
2.1. Система разрешающих уравнений	35
2.2. Конечный элемент тонкостенной оболочки из ВКМ	40
2.3. Стержневой конечный элемент.....	48
2.4. Расчет собственных форм и частот.....	51
2.5. Расчет амплитуд установившихся колебаний	53
Выводы по главе 2	56
3. Анализ расчетной модели МКЭ	58
3.1. Конструкция и расчетная модель деки.....	58
3.2. Упругое деформирование деки. Расчет и эксперимент.....	61
3.3. Тестирование. Расчёт пластинок	64
3.3.1. Задача статики.....	64
3.3.2. Задача динамики	67
3.3.3. Задача устойчивости	70
Выводы по главе 3	72

4. Экспериментальное исследование механических колебаний гитарной деки	75
4.1. Экспериментальная установка.....	75
4.2. Анализ собственных форм. Фигуры Хладни	78
4.3. Построение АЧХ и определение констант демпфирования	81
4.4. Физико-механические характеристики материалов.....	87
4.5. Сопоставительный анализ результатов расчётов и экспериментов	90
4.6. Цифровой спектральный анализ	94
4.6.1. Влияние акустического резонатора	96
4.6.2. Влияние струн	99
Выводы по главе 4	103
5. Характеристики гитарной деки в зависимости от конструктивных факторов	105
5.1. Исследование напряжённого состояния	105
5.2. Параметрический анализ спектра собственных колебаний.....	107
5.2.1. Влияние схемы подкрепления.....	107
5.2.2. Влияние начального напряженного состояния ...	111
5.2.3. Влияние геометрических размеров	113
5.2.4. Влияние конструктивных факторов.....	114
5.3. Сопоставление частот собственных колебаний деки и струн	116
Выводы по главе 5	120
6. Анализ резонансных характеристик.....	122
6.1. Статические и динамические податливости	122

	Стр.
6.2. Зависимость резонансных амплитуд от схемы подкрепления	129
6.3. Зависимость резонансных амплитуд от высоты ребер жесткости	134
6.4. Зависимость резонансных амплитуд от уровня демпфирования	136
Выводы по главе 6	138
Общие выводы	140
Список литературы	144
Приложения	162
Приложение 1. Результаты тестирования	163
Приложение 2. Результаты внедрения	169

Перечень сокращений

АМ	– асимптотический метод,
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика,
ВКМ	– волокнистый композиционный материал
ГУ	– граничные условия,
КЭ	– конечный элемент,
МКЭ	– метод конечных элементов,
МИ	– музыкальный инструмент,
НДС	– напряженно-деформированное состояние,
НИР	– научно-исследовательская работа,
ПЭВМ	– персональная ЭВМ,
САПР	– система автоматического проектирования,
СПМ	– спектральная плотность мощности,
ЭВМ	– электронная вычислительная машина.

Введение

История развития музыкальных инструментов (МИ) непосредственно связана с развитием человеческого общества – его культуры, науки и техники. За многие столетия в области разработки, конструирования и производства МИ накоплен богатый опыт, сформированы определенные традиции. Длительная эволюция и естественный отбор привели к созданию совершенных конструкций.

Отметим знаменитую кремонскую школу (близ Кремоны, Италия). Глава школы А. Амати (1535 – 1611) и его прославленные ученики А. Гварнери (1626 – 1698), Д. Гварнери (1666 – 1738), А. Страдивари (1640 – 1737) изготовили около 1000 скрипок, виолончелей, контрабасов, гитар, до сих пор не превзойденных по своим достоинствам. Традиции и тайны непревзойдённого мастерства передавались от отца к сыну, от мастера к ученику.

Сегодня стоимость лучших инструментов Страдивари, Гварнери превышает миллион условных единиц (у.е.). В то же время стоимость современных первоклассных МИ, как правило, составляет не более десяти тысяч у.е., цена же фабричных инструментов для начинающих и вовсе не превышает ста у.е.

Возникает вопрос, в чём разница между ними? Отражает ли сложившийся уровень цен столь существенную разницу в классе? Могут ли современные МИ соперничать с лучшими образцами великих итальянских мастеров? Дебаты на эти темы не утихают уже около двухсот лет. Эти вопросы волнуют не только исполнителей и музыкальных мастеров, но и учёных – исследователей, задача которых заключается в том, чтобы не только понять это различие, но и описать его количественно.

Отметим, что до сих пор лучшие образцы МИ изготавливаются вручную. Основные параметры инструментов определяются опытным путём, на основе сложившихся традиций и правил. Очевидно, возможности эмпирического пути развития к настоящему времени в основном исчерпаны.

В современных условиях, прежде всего условиях жесткой конкуренции, во многих областях техники происходит быстрая смена конструкционных материалов, идет внедрение новых более совершенных технологий и конструкций. Стремительно развивается вычислительная математика и механика. Большое влияние на науку и технику оказывает развитие и совершенствование ЭВМ. Получают развитие методы математического моделирования, на базе которых разрабатываются САПР. Современная вычислительная техника и программное обеспечение позволяют с высокой степенью достоверности моделировать реальные процессы и проектировать более совершенные конструкции.

В музыкальной промышленности идет напряженный поиск более рациональных форм и размеров конструкций. Внедряются прогрессивные конструкционные материалы. Разрабатываются МИ с новым уровнем акустических свойств. Всё это предъявляет повышенные требования к качеству проектирования. Сегодня при создании и совершенствовании МИ ключевое значение приобретает научная база, которая, с одной стороны, отражает и систематизирует опыт, с другой – использует знания и методы точных наук: математики, физики, механики.

В диссертации рассматривается класс струнных МИ, которые в зависимости от способа извлечения звука делятся на клавишные, смычковые и щипковые. В качестве объекта исследования

принят струнный щипковый инструмент – семиструнная классическая гитара.

Первые упоминания о гитаре относятся к XIV – XV вв. Название "гитара" произошло от названия древнегреческого МИ "кифара". В конце XVI в. широкое распространение в Европе, затем в Америке получила шестиструнная испанская гитара. В России гитара появилась позднее, начиная с XVIII в. широкое признание получила семиструнная гитара. В настоящее время гитара – один из наиболее популярных и любимых МИ. На ней играют миллионы музыкантов – любителей, профессионалов.

Основными элементами любого струнного МИ являются:

- Струны – источники механических колебаний.
- Деки – усилители механических колебаний.
- Акустические внутренние полости – резонаторы звуковых колебаний.

Струнный МИ в целом – это связанная упруго-акустическая система. Упругие колебания струн, дек и звуковые колебания давления связаны друг с другом. Струны с декой представляют генератор и излучатель звука, устройство для возбуждения звуковых волн в окружающей воздушной среде.

Конструкция МИ сочетает в себе целый ряд достаточно противоречивых свойств и качеств. С одной стороны, МИ должен быть легким, удобным для игры, с другой – обладать достаточной прочностью, жесткостью и долговечностью в условиях эксплуатации.

Помимо прочности и жёсткости, решающее значение при оценке качества МИ всё-таки имеют его акустические характеристики. В свою очередь акустика МИ определяется упругими, инерционными и диссипативными свойствами его отдельных

элементов. Одни элементы имеют повышенные жесткость и демпфирующую способность (это, прежде всего, элементы корпуса), другие, наоборот, – в меру податливые и имеют экстремально низкое демпфирование (струны).

Ключевым элементом конструкции музыкального струнного инструмента является дека (звучащая доска). Функционально дека предназначена для усиления механических колебаний струн. "Звуки скрипки, гитары исходят от её деки, а не от струн, ибо дека в состоянии вторить тем звукам, которые первоначально вызывает струна" [24]. Колебания струн "раскачивают" деку. Дека оказывает решающее влияние на формирование тембра, силу и длительность излучения звуков.

Идеальная дека должна [10, 42, 59, 113, 114]:

- Обеспечивать минимальные потери при передаче энергии упругих колебаний струн окружающей воздушной среде.
- Равномерно усиливать колебания всех частот спектра возбуждения.

Однако в реальных условиях дека обладает определенной избирательностью. Она усиливает одни составляющие спектра возбуждения и ослабляет другие. Частотная зависимость динамической реакции деки искажает состав спектра возбуждения. Явление избирательности и искажения проявляется тем сильнее, чем слабее демпфирование, чем "острее" резонансы деки. Повышение демпфирующей способности, в свою очередь, увеличивает потери энергии механических колебаний, что приводит к уменьшению продолжительности звучания и ухудшению качества МИ.

Важной характеристикой деки является её упругая податливость. Хорошая дека всегда податливая. Чем выше податливость, тем ниже собственные частоты, включая частоту основного тона,

и выше амплитуды колебаний. Такая дека излучает сильный звук с низким основным тоном. Однако повышенная податливость, в свою очередь, приводит к значительным деформациям деки при настройке и натяжении струн колками.

Таким образом, гармонию "интересов" приходится искать компромиссным путем, имея в виду следующие критерии качества:

1. Гладкий, относительно ровный характер резонансной кривой [105, 106].

2. Низкая частота основного тона, или достаточно высокая податливость [10, 59].

Актуальность работы определяется необходимостью решения важной научно-технической и социально-культурной проблемы, связанной с разработкой методики расчета и проектирования корпусных элементов конструкций струнных МИ.

На защиту выносятся результаты, содержащие элементы научной новизны:

- Методика исследования динамики тонкостенных элементов конструкций МИ.

- Математическая модель и вычислительные алгоритмы расчета параметров собственных и вынужденных колебаний с учетом подкреплений и начального НДС, обусловленного предварительным натяжением струн.

- Результаты физического и математического моделирования, устанавливающие зависимости динамических характеристик резонансных дек от конструктивных факторов.

Для решения проблемы привлекаются методы теории тонких пластин и оболочек из ВКМ, теории колебаний, вычислительной

математики и механики, экспериментальные методы исследования.

Диссертация предусматривалась планом НИР кафедры сопротивления материалов и прикладной механики Марийского государственного технического университета в рамках госбюджетной темы «Механика конструкций и материалов» (1999 – 2003 годы).

Она состоит из введения, шести глав, общих выводов, списка использованной литературы и приложений.

В первой главе дан обзор и систематический анализ исследований МИ, как в нашей стране, так и за рубежом. Приведены сведения из истории музыкальной акустики. Рассмотрены существующие расчётные модели и методы исследования. Выполнен анализ известных конструкций гитарных дек. Представлены характерные акустические характеристики высококлассных и фабричных образцов МИ. Сформулированы цели и задачи работы.

Вторая глава посвящена разработке методики расчёта корпусных элементов конструкций МИ. Учитываются переменная кривизна поверхности оболочек, анизотропия физико-механических свойств материала, наличие подкреплений в виде асимметричного набора рёбер жесткости. Используется вариант МКЭ, основанный на смешанной вариационной формулировке принципа Хеллингера-Рейсснера и теории тонких оболочек Тимошенко. Задача динамики формулируется как задача на вынужденные колебания предварительно напряженной конструкции. С учётом демпфирования рассматривается вычислительный алгоритм расчета установившихся амплитуд колебаний.

В третьей главе дан анализ расчётной модели. Рассмотрена конструкция и расчетная модель деки классической гитары. Исследовано упругое деформирование под действием сил натяже-

ния струн колками. Данные расчётов сопоставлены с результатами экспериментов. Решен ряд тестовых задач статики, динамики и устойчивости тонких пластинок. Достоверность расчетной модели подтверждается согласованностью полученных результатов: параметров НДС, спектров собственных частот, критических нагрузок с известными данными классических решений. Исследованы сходимость и точность моделей МКЭ.

Четвертая глава содержит результаты расчётно-экспериментальных исследований механических колебаний гитарной деки. Представлены методики и аппаратура измерений собственных частот и форм, констант демпфирования, амплитуд вынужденных колебаний при силовом моногармоническом возбуждении. Установлены физико-механические характеристики конструкционных материалов. Показано, что дека с подкреплениями обладает более ровным составом резонансных амплитуд, чем дека без подкреплений. Результаты физических экспериментов: резонансные амплитуды, собственные частоты и формы колебаний сопоставлены с данными расчета МКЭ. Путём цифрового спектрального анализа исследовано влияние акустической внутренней полости и струн на спектр собственных частот колебаний деки.

В пятой главе исследуется напряженное состояние деки под действием сил натяжения струн. Показаны 10 низших собственных форм в зависимости от схемы подкрепления. Исследованы зависимости спектров собственных частот от конструктивных факторов. Установлены основные закономерности. Собственные частоты деки сопоставлены с частотными характеристиками струн. Дека и струны рассматриваются как парциальные динамические системы.

В шестой главе приводятся результаты вычислительных экспериментов. Рассматриваются статические и динамические податливости точек крепления струн к деке. В зависимости от схемы подкрепления, размеров рёбер жесткости и уровня демпфирования исследованы спектры резонансных амплитуд.

В общих выводах подводятся итоги диссертационной работы.

В приложениях приводятся результаты решений задач статиче- ки, динамики и устойчивости пластинок, подтверждающие достоверность расчетной модели МКЭ. Представлены результаты внедрения диссертационной работы.

1. Методы исследования музыкальных инструментов

В первой главе дан краткий анализ исследований в области динамики тонкостенных конструкций. Рассмотрены существующие расчетные модели и методы исследования МИ. Приведены сведения из истории музыкальной акустики. Представлены конструкционные материалы, рассмотрены конструкции резонансных дек. Сформулированы цели работы и поставлены задачи исследований.

1.1. Сведения из истории музыкальной акустики

Музыкальная акустика – одна из наиболее древних областей знаний. Еще древнегреческий математик и философ Пифагор (6 век до н.э.) видел связь между высотой тона и длиной струны. С именем Пифагора связано построение первого в истории человечества музыкального строя, в котором в качестве основы использована чистая квинта с отношением частот 3:2.

Целостная система знаний о движении и музыке представлена в энциклопедических трудах Аристотеля (4 век до н.э.). Уже в то далёкое от нас время Аристотель правильно трактовал природу звука. Звук он связывал с распространением волн разрежения и сжатия воздуха.

Основы учения о музыкальной акустике древних изложены в классических трудах С. Бетиуса (480 – 525). Многие из его взглядов близки нашим представлениям. В частности он писал: "Если движение при ударе медленное, то возбуждается более низкий тон, ибо подобно тому, как медленное движение ближе к состоянию покоя, так и низкий тон ближе к молчанию. Быстрое движение приводит к высокому звучанию. Вся совокупность час-

тей соединяется в известной пропорции. Пропорции же познаются, главным образом, в числах. В зависимости от многократных или подразделенных пропорций слышатся либо созвучные, либо несозвучные тоны. Созвучные тоны – это такие тоны, которые, взятые одновременно, создают приятное и слитное звучание. Несозвучные тоны – это такие тоны, которые, взятые одновременно, не создают приятного и слитного звучания".

Последнее положение почти дословно совпадает с современными представлениями консонанса и диссонанса.

Одним из основателей современной музыкальной акустики принято считать великого Г. Галилея (1564 – 1642). Галилей представлял, что звучащее тело испытывает упругие колебания. Причём высота звука определяется частотой колебаний, интенсивность звука – амплитудой. Галилей пытался понять и объяснить, почему музыкальные интервалы с простыми отношениями 1:1, 1:2, 2:3 и некоторые другие – кажутся приятными на слух, а музыкальные интервалы с отношениями больших чисел, например 15:16, – неприятными.

В истории музыкальной акустики особое место занимает струна как источник звука [69]. При изучении механических колебаний струн были открыты многие законы акустики. Решение задачи о колебаниях струн послужило основой рядов Фурье (основой гармонического анализа).

Здесь, прежде всего, отметим труды Ж. Савера (1653 – 1716), опубликованные Парижской академией наук в 1700 – 1707 годах. В них изложены результаты экспериментальных исследований колебаний струн и впервые использованы термины: узел и пучность колебаний, основной и высший тоны. Показано, что при колебаниях струн излучается звук, соответствующий нескольким тонам, взятым одновременно. Более высокие тоны находятся в

кратном отношении к частоте основного тона. Все эти представления, введенные в 1700 году, сохранились неизменными до наших дней.

Первое решение задачи о колебаниях струн было получено Б. Тэйлором (1685 – 1731). Тейлор рассчитал частоту основного тона в зависимости от длины, массы и силы натяжения струны.

Проблемы колебаний струн занимали видное место в работах Л. Эйлера (1707 – 1783), Д. Бернулли (1700 – 1782), Ж. Д'Аламбера (1717- 1783), Ж. Лагранжа (1736 – 1813). В этих работах разработана общая волновая теория и получено решение задачи об установившихся колебаниях струн. Динамическое поведение струн представлено суперпозицией двух поперечных волн, бегущих навстречу друг другу в продольном направлении.

Задача о неуставившихся колебаниях струн с упругими опорами на основе решения волнового уравнения в форме Фурье рассмотрена С.П. Тимошенко [124]. Показано, что волновые эффекты представляют практический интерес лишь при исследовании переходных процессов, обусловленных ударным нагружением.

Задачи о колебаниях струн вызывают интерес и в наши дни. В работах Ю.А. Демьянова [39], Н.А. Комарова [56, 57] струна представлена как элемент конструкции МИ. Учитываются изменения длины и растягивающей силы в результате прижима струны к ладу при “переборе” струн. Рассматриваются параметрические эффекты: наряду с распространением поперечных волн исследуются продольные волны, связанные с колебательными движениями опорной конструкции. Однако результаты решений представляют ограниченный интерес, поскольку получены при отсутствии достоверных данных о динамических характеристиках опорной конструкции. Заметим, что опорой струны служит

дека. Характеристики опорной конструкции определяются, прежде всего, динамическими податливостями деки.

Основателем экспериментальной акустики по праву считается Э. Хладни (1756 – 1827). В своей книге по акустике [156] он привёл результаты исследований колебаний звучащих тел – мембран, пластин, колоколов. Он первый продемонстрировал существование узловых линий при колебаниях пластинок.

Большой вклад в развитие музыкальной акустики внес Г. Гельмгольц (1821 – 1894). Гельмгольц глубоко проник в состав музыкальных звуков; тембр звука объяснил наличием добавочных тонов (обертонов); построил математическую модель человеческого уха, открыв при этом комбинационные резонансы.

Работы по акустике на уровне конца XIX века получили систематическое изложение в фундаментальном труде Дж.У. Рэлея (Дж.В. Стретта) [122]. В нем с единых позиций рассмотрены колебательные и волновые процессы, имеющие различную физическую природу.

1.2. Материалы и конструкции корпусных элементов

Основными элементами корпуса МИ является дека. Рассмотрим особенности конструкций резонансных дек, характерные для щипковых и смычковых струнных МИ [10, 15, 59, 61, 113].

Резонансная дека, прежде всего, это тонкостенная конструкция. Размеры и форма деки определяют вид МИ. У классических гитар и скрипок дека напоминает восьмёрку, у мандолин и домр – неправильный овал, у балалаек – треугольник. У одних МИ дека плоская, у других – пространственная криволинейная. Стенка, как правило, имеет переменную толщину.

Деки современных МИ (даже в пределах одного вида) отличаются большим разнообразием форм. В настоящее время идёт широкий поиск новых форм (конфигураций), однако этот поиск проводится исключительно эмпирическим путём.

Несмотря на указанные различия, все деки содержат однотипные элементы: резонансный щит в виде пластинки или обложки, пружинки, подставку для струн. В резонансных щитах предусматриваются отверстия – круглые или в виде буквы “S” (“эфы” у скрипок). Отверстия служат для передачи акустических колебаний столба воздуха, заключённого внутри корпуса, в окружающую воздушную среду. Разрывая поверхность верхней деки, они не только оказывают влияние на её собственные формы колебаний, особенно в области высоких частот, но и, что важнее, усиливают звук в области низких частот. Это происходит за счёт явления “воздушного резонанса Гельмгольца”, при возвратнопоступательном движении через отверстия воздуха.

Для увеличения жёсткости резонансного щита применяются пружинки. Пружинки представляют деревянные бруски, приклеиваемые к внутренней поверхности деки. Они служат для акустической настройки МИ. Схема расположения пружинок, их размеры оказывают существенное влияние на спектр колебаний деки, на силу и тембр звука МИ [10, 59, 113].

На рис. 1.1 изображены характерные схемы подкреплений гитарной деки. Различают поперечную, веерную и комбинированные схемы [59, 93, 95]. Схема 2 характерна для гитар массового производства. Схемы 3 – 9 – для высококлассных гитар. Очевидно, что каждая из этих схем имеет свои достоинства и свои недостатки.

Материалом для изготовления дек традиционно служит резонансная древесина. Акустические свойства древесины характери-

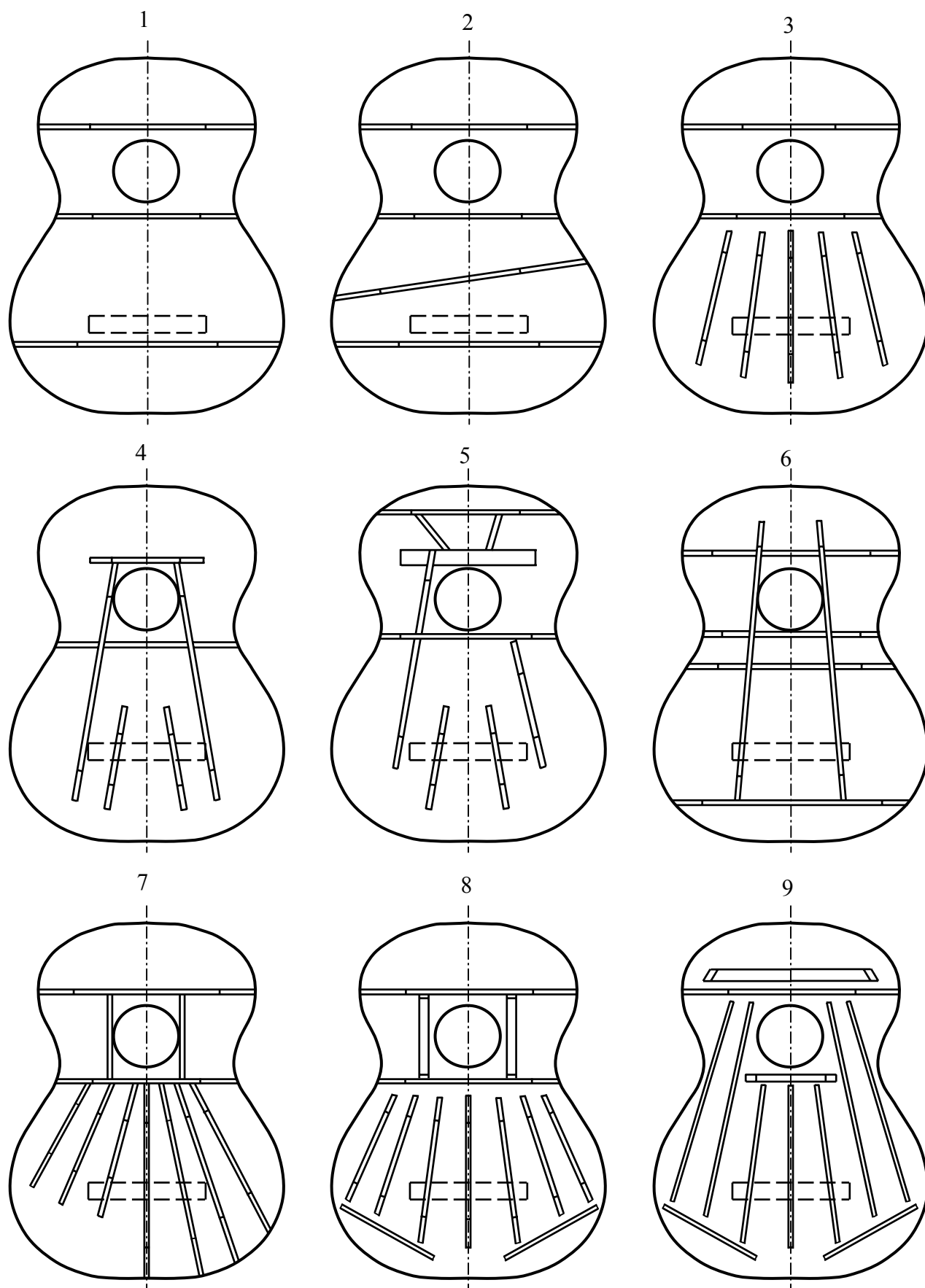


Рис.1.1. Характерные схемы подкреплений

зуются акустической константой, или константой излучения Н.Н. Андреева [5, 161]:

$$K = \sqrt{\frac{E}{\rho^3}} = \frac{c}{\rho}, \quad (1.1)$$

где E – модуль упругости, ρ – плотность, c – скорость распространения звука в древесине. Чем больше величина K , тем лучше древесина.

Наиболее подходящими материалами для дек считаются ель, сосна, пихта кавказская, кедр сибирский. Из них наибольшее распространение получила резонансная ель [130].

К настоящему времени резонансные породы древесины становятся уникальным природным сырьём. Стоимость кубометра сертифицированных заготовок на мировом рынке достигает 1 – 1,5 тыс. долларов США. Высокая стоимость резонансной древесины заставляет производителей МИ вести энергичный поиск альтернативных материалов.

В качестве заменителей древесины находят применение металлы, картон, клеёная фанера, стекло, различные пластмассы [90, 96, 97]. Однако ни один материал не получил широкого распространения. Опыты НИИ музыкальной промышленности показали [113], что замена конструкционного материала должна сопровождаться изменениями формы деки. Только при этих условиях достигаются удовлетворительные результаты.

В работах [91, 98] для изготовления корпусных элементов струнных МИ используются пористые пластики. Отмечается, что МИ из поропластов обладают повышенными акустическими качествами. В то же время их отличают сравнительно малый вес, высокие прочность и долговечность.

Пористые пеноматериалы: полиуретан, полистирол и АВС-пластик обладают акустическими характеристиками, близкими к

характеристикам резонансной древесины [133]. К достоинствам полиуретана относятся высокие прочность и эластичность, простая технология механической обработки. К недостаткам – быстрое старение и ползучесть.

В работах [99 – 101] при изготовлении дек предлагается использовать специальные покрытия. В [94] рассматривается вариант нанесения вибропоглощающих (демпфирующих) покрытий на отдельные участки поверхности деки.

Сегодня в качестве перспективных конструкционных материалов для производства МИ рассматриваются композиты. Известны реальные конструкции гитар и скрипок, у которых деки изготовлены из пластиков, армированных стеклянными и углеродными волокнами [44, 55, 92]. Испытания, проведённые в Университете штата Южной Каролины (США), показали, что прочностные и акустические характеристики МИ из углепластиков (графит – эпоксидная смола) не уступают характеристикам МИ, изготовленных из лучших пород резонансной древесины.

Отметим, что искусственные конструкционные материалы применяются не только в опытно-конструкторских разработках. На фабрике по производству народных музыкальных инструментов им. А.В. Луначарского (АООТ “Арфа”) для производства щипковых МИ: гитар, домр, балалаек в настоящее время используются пластмассы [10]. Для этого применяются технологии вакуумного формования. Широкой известностью пользуются компании Russtone XXI, Catalyst Instruments и CA Guitars, успешно внедряющие в производство струнных МИ искусственные материалы. Качество МИ на основе современных материалов не уступает лучшим традиционным образцам.

Таким образом, в общем случае резонансная дека струнного МИ – это тонкостенная пространственная конструкция, которая

имеет целый ряд специфических особенностей. Её отличают переменные кривизна поверхности и толщина стенки; достаточно сложная и разнообразная конфигурация контура; неоднородная слоисто-волокнуистая структура материала при ярко выраженной анизотропии физико-механических свойств; наличие асимметричного набора рёбер жёсткости (пружинок); поле начальных напряжений, обусловленных предварительным натяжением струн.

1.3. Обзор исследований динамики тонкостенных конструкций

Разработке методов исследований динамики тонкостенных конструкций посвящены многочисленные работы. Результаты работ опубликованы во многих статьях, ряде монографий, представлены в учебной и справочной литературе [4, 8, 17, 28, 29, 31, 32, 40, 41, 52 – 54, 73, 75, 76, 81, 85, 111, 117].

Существуют несколько вариантов теории многослойных пластин и оболочек из ВКМ. В отличие от однородных и изотропных материалов, здесь важным фактором расчётной схемы являются деформации поперечного сдвига и силы инерции, связанные с поворотом нормали.

Одним из первых вариантов теории тонких пластин, учитывающей поперечный сдвиг, был предложен Е. Рейснером в 1944 году [172].

Результаты фундаментальных исследований представлены в работах Н.А. Алфутова, П.А. Зиновьева, Б.Г. Попова [1, 2, 104], С.А. Амбарцумяна [3], В.Л. Бидермана [18], В.В. Болотина [20 – 23], Г.А. Ванина [25], В.В. Васильева [27], Р.Кристенсена [60], С.Г. Лехницкого [68], Ю.Н.Работного [108], С.П. Тимошенко [124 – 126], Л.А. Шаповалова [132] и других авторов.

Как правило, уравнения динамики строятся на базе уравнений статики, путём введения в них динамических членов, учитывающих силы инерции и силы сопротивления движению. Для этого применяются принцип Даламбера или вариационный принцип Гамильтона – Остроградского.

Отметим два принципиальных подхода к построению расчётных моделей тонкостенных конструкций. Первый подход предусматривает применение уравнений пространственной (общей) теории упругости. Второй предполагает сведение трёхмерной задачи к двумерной на основе ряда упрощающих предположений (гипотез).

Известны два типа физических гипотез. Гипотезы первого типа описывают деформирование каждого слоя в отдельности, поэтому носят название гипотез ломаной нормали. Порядок разрешающих уравнений в этом случае получается кратным числу слоёв.

Гипотезы второго типа отражают деформирование пакета слоёв в целом, поэтому их называют пакетными гипотезами. Порядок разрешающих уравнений в этом случае не зависит от числа слоёв.

В монографии В.В. Васильева [27] представлена универсальная расчётная модель тонкостенных элементов конструкций из композитов, учитывающая поперечный сдвиг. Рассмотрен широкий класс задач статики и динамики пластин и оболочек.

В случае, если толщина оболочки и сдвиговая жёсткость пакета достаточно малы, хорошее приближение получается на основе гипотез, предложенных С.П. Тимошенко [126]. Гипотезы типа Тимошенко позволяют получать достаточно корректные и компактные решения: порядок разрешающих уравнений получается независимым от числа слоёв.

Следует иметь в виду, что классические теории оболочек справедливы для области низших частот колебаний при условии, что толщина стенки достаточно мала по сравнению с длинами полуволн расчётных форм колебаний.

Для решения задач динамики тонкостенных конструкций широко применяются асимптотический метод [20, 22, 28], вариационные методы Рэлея – Ритца, Галёркина [8, 18, 26, 124]. Однако область применимости классических методов ограничена в основном академическими проблемами.

Для расчёта реальных конструкций широкое распространение получили численные методы. Применение численных методов особенно эффективно для конструкций со сложной геометрией, с разрывами физико-механических свойств материала, при сложных ГУ [11, 12, 33, 83, 104, 107, 109, 119]. В основу численных методов положены дискретные расчетные схемы. В результате дискретизации континуальная система с бесчисленным числом степеней свободы приводится к системе с конечным числом степеней свободы. Для дискретизации конструкций применяются конечно-разностные и конечно-элементные схемы.

Эффективным средством реализации численных методов являются вариационные формулировки: условия стационарности некоторых энергетических функционалов [16, 26]. Особенно рациональным оказывается сочетание вариационных формулировок с аппаратом матричной алгебры. В работе Б.Г. Попова [104] такой подход назван вариационно-матричным.

При описании сложных процессов деформирования, характерных для многослойных тонкостенных конструкций с неоднородной структурой, с ярко выраженной анизотропией физико-механических свойств, вариационно-матричные методы позволяют строить системы разрешающих уравнений строго в соответст-

вии с исходными допущениями и гипотезами. Приближенные решения в этом случае получаются наиболее достоверными.

Сегодня одним из наиболее распространенных численных методов является метод конечных элементов (МКЭ). Он предполагает явную аппроксимацию решения на малых подобластях (конечных элементах). Для интерполяции применяются координатные функции, имеющие различный порядок. Это обстоятельство позволяет строить решения с "разумной строгостью" [43]. Кроме того, что исключительно важно, алгоритмы МКЭ отличаются высокая устойчивость процессов вычислений.

Инженерная интерпретация МКЭ дана в известных монографиях О. Зенкевича [47, 48], Р. Галлагера [35], Д. Норри и Ж. Д'Фриза [82], Л. Сегерлинда [118], В.А. Постнова [107]. Математические аспекты теории МКЭ рассмотрены в книгах Г. Стренга и Дж. Фикса [121], С.Ю. Еременко [43]. Вычислительные алгоритмы и программы представлены в работах К. Бате и Е. Вилсона [11], Б. Айронса и С. Ахмади [165], У. Вивера и П. Джонстона [178]. Отметим разработки на основе МКЭ – универсальные программные комплексы ANSYS, NASTRAN [79,134].

Приложение МКЭ к расчету многослойных пластин и оболочек представлено в работах Н.А. Алфутова, П.А. Зиновьева, Б.Г. Попова [1], Р.Б. Рикардса и А.К. Чате [112], а также других авторов [9, 36, 37, 109, 110, 150, 162, 177].

1.4. Расчетные модели и методы исследования

К настоящему времени в нашей стране и за рубежом опубликовано значительное число работ, посвященных теоретическому и экспериментальному исследованиям элементов конструкций МИ.

Очевидно, начало теоретическим исследованиям положено работами [38, 84, 129]. Применительно к деке рояля вводится понятие эквивалентной однородной модели: тонкой пластинки без бруса и рёбер жёсткости. Дека представляется динамической системой с одной степенью свободы. Получены приближённые значения первой собственной частоты и скорости распространения волн изгиба.

Значительный вклад в развитие теории МИ внёс А.В. Римский-Корсаков [113, 114]. Его монография [113] стала своеобразным руководством по проектированию и производству МИ. В ней рассматриваются деки струнных МИ. Расчётные модели представляются в виде изотропных круглой пластинки, закреплённой по контуру, и прямоугольной пластинки, подкреплённой центральным ребром жёсткости.

Решается задача на вынужденные колебания при моногармоническом силовом возбуждении. Вынуждающая сила прикладывается по нормали к поверхности деки. Рассматриваются два предельных положения: в одном случае точка приложения вынуждающей силы совмещается с узловой линией, в другом – с пучностью колебаний. Для двух положений силы в условиях резонанса рассчитываются динамические податливости. В зависимости от податливостей определяются характеристики излучения деки. Произведение скорости колебаний точки приложения силы на амплитуду силы определяет мощность излучения деки. Предполагается, что все точки деки при этом колеблются синфазно.

Отношениями

$$K_{\partial} = \frac{W_u}{W_c} = \frac{K}{\delta} \quad (1.2)$$

характеризуется коэффициент полезного действия деки на резонансной частоте. Здесь W_u – мощность излучателя (деки),

W_c – мощность струны, K – акустическая константа, δ – логарифмический декремент.

А.В. Римский-Корсаков провёл серию экспериментов, в ходе которых сопоставил спектры колебаний скрипок разного качества. Он показал, что подобие АЧХ резонаторов в полосе частот 260 – 270 Гц и излучателей в полосах 400 – 500 Гц и 700 – 1500 Гц обеспечивает хорошее соответствие акустических характеристик. При этих условиях музыканты – профессионалы не могли отличить звуки копии скрипки от звуков оригинала.

Внимание исследователей уделяется и сравнительному анализу акустических характеристик готовых МИ. В [163] акустические характеристики виолончелей получены при равномерном движении смычка, при этом интенсивность звука измерялась при помощи микрофона. На рис.1.2 приведены усреднённые АЧХ виолончелей различного класса [88]. Сравнительный анализ показывает, что виолончели, изготовленные в мастерской Гварнери, отличается более ровный спектр резонансных амплитуд.

В работе Г.Г. Звездкиной [46] рассматривается методика сравнительной оценки акустических качеств щипковых МИ. С этой целью проводятся испытания 18 допр. Вводится понятие модельного диска: круглой изотропной пластинки, шарнирно опертой по контуру. В качестве основных акустических характеристик деки рассматриваются масса диска, низшая собственная частота, максимальный прогиб под действием сосредоточенной силы, модуль упругости материала, коэффициент Пуассона и волновое сопротивление. Эти характеристики снимались с лучших образцов, затем копировались при изготовлении серии.

Наиболее обстоятельный обзор зарубежных исследований на уровне 1967 года выполнен Ф. Винкелем [179].

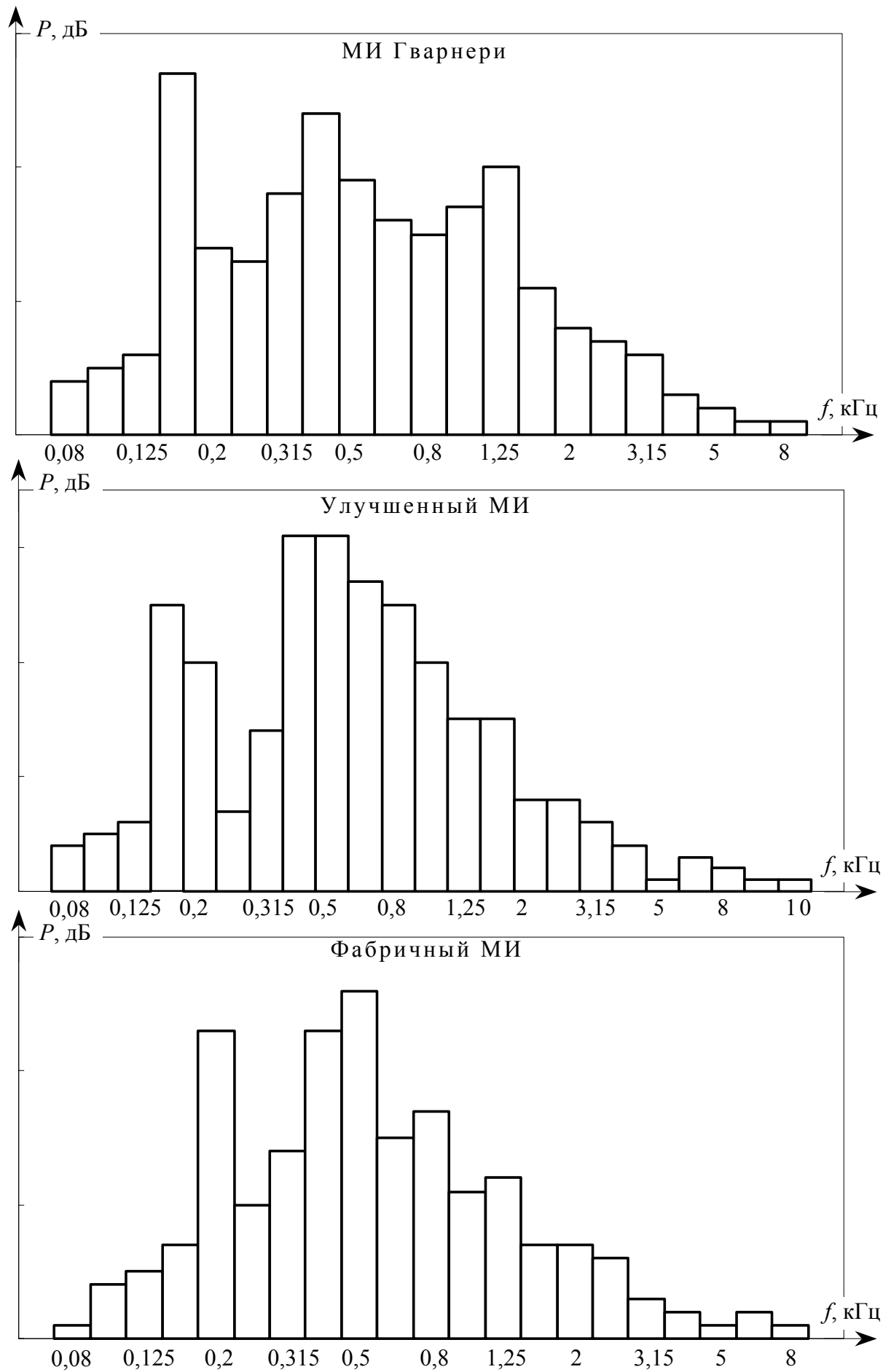


Рис.1.2. Усредненная АЧХ виолончелей

Изучением динамических свойств конструкций гитар занимался австралийский учёный Г. Колдерсмит [154, 155]. В своих работах расчётным и экспериментальным путём он получил значения низшей собственной частоты колебаний деки. Расчётная схема выбиралась в виде круглой пластинки. Экспериментальные данные получены методом голографической интерферометрии.

Отметим, что представленные выше расчетные модели носят явно упрощённый характер. Они не позволяют получить достоверные результаты и с достаточной полнотой описать динамические свойства реальных конструкций.

Вместе с тем, следует отметить, что в настоящее время для исследований корпусных элементов МИ привлекаются современные вычислительные и экспериментальные методы, разрабатываются расчётные модели высокого уровня.

В [152] на базе программного комплекса ABAQUS построена конечно-элементная модель корпуса скрипки. Для этого использованы 17000 плоских и 2500 пространственных КЭ. Расчетные собственные частоты и формы колебаний сопоставлены с результатами эксперимента. Отмечено хорошее соответствие результатов.

В [157, 158] группой испанских исследователей при помощи МКЭ рассчитаны низшие собственные частоты гитарной деки на различных стадиях ее изготовления. Результаты расчётов сопоставлены с экспериментальными данными. Исследовано влияние акустической полости и конструктивных элементов корпуса на динамические свойства гитары.

В [89] представлена конечно-элементная динамическая модель колокола. При этом использованы 3000 КЭ с 8600 степенями свободы. Путём математического моделирования разработана конструкторская и технологическая документация для колоколов

с наперёд заданными акустическими свойствами. На базе литейного производства АМО ЗИЛ отлит ансамбль бронзовых колоколов весом от 0,04 до 20 кН

В [174] для определения форм колебаний резонансной деки использовалась электронная телевизионная голография. Рассмотрены колебания гитарной деки, подкреплённой ребрами жесткости (пружинками). Исследовано влияние схемы подкрепления на спектр собственных форм и частот колебаний.

Королевский технологический институт в Стокгольме – одно из наиболее известных в мире мест комплексных исследований МИ (наряду с Кембриджским и Стэнфордским университетами). Работающий там Е.В. Йенсен уже более тридцати лет занимается изучением МИ. В его исследованиях [167, 170] рассматривается влияние параметров внутренних полостей скрипок и гитар на тембр звука. Показано, что от объёма акустической внутренней полости зависит высота основного тона МИ. Анализируются собственные формы колебаний.

В [166, 176] наряду с акустическими методами используются голографические методы исследований. С их помощью определяются пять низших собственных форм колебаний гитарной деки, а также формы колебаний верхней и нижней скрипичных дек. При этом колебания возбуждаются в ряде точек, и при помощи микрофона определяются зависимости давления от частоты возбуждения.

В работе [169] представлены результаты акустических испытаний 90 скрипок разных мастеров, включая 20 староитальянских. Для возбуждения колебаний используется электродинамическая система. При помощи шести микрофонов (для подавления эффекта направленности) записываются резонансные кривые. Анализ резонансных кривых позволяет выявить ряд типичных

особенностей, присущих староитальянским инструментам. Прежде всего, стабильное значение низшей резонансной частоты верхней деки. Кроме того, достаточно высокие амплитуды колебаний на резонансных частотах в полосах 600–1000 Гц и 1600 Гц.

Измерения показывают, что спектры излучения звука староитальянских скрипок существенно отличаются от спектров других скрипок. Этим объясняется их качественное различие. Автор делает вывод, что повышение интенсивности излучения звука во всем диапазоне акустических частот не эффективно. Для совершенствования МИ достаточно ограничиться изменениями спектрального состава излучения лишь в некоторых, достаточно узких полосах частот.

Представляют интерес результаты НИР, полученные на экспериментальной фабрике щипковых МИ [15, 148]. В этих работах рассматривается влияние размеров и схемы расположения пружинок на спектр колебаний деки. Устанавливается, что форма поперечного сечения пружинок не оказывает заметного влияния на качество звука. Путём изменения высоты пружинок регулируется основной тон. Понижение основного тона субъективно воспринимается как улучшение качества звука МИ [15, 59].

В заключение следует отметить наши работы, проводимые с 1998 года, посвящённые оценке влияния конструктивных и физико-механических параметров на динамические свойства гитарной деки [62 – 65, 135 – 145].

Обобщая сказанное, отметим следующее. Обеспечение высокого качества МИ связано с решением комплекса задач, как по совершенствованию самой конструкции, так и по расширению номенклатуры конструкционных материалов. Систематический анализ позволяет выделить три характерных направления исследований:

1. Сравнительные исследования акустических характеристик готовых МИ с целью определения и копирования лучших образцов [30, 34, 42, 46, 56, 67, 103, 113, 114, 148, 149, 151, 163, 168, 170, 171 173, 174].

2. Исследования физико-механических и акустических свойств конструкционных материалов с целью улучшения их качества [44, 55, 70, 71, 92, 127, 128, 130].

3. Разработка расчётных моделей и моделирование поведения элементов конструкций МИ [6, 13, 14, 38, 62 – 65, 72, 84, 115, 135 – 145, 152 – 155, 158, 160, 166 – 168, 175, 176].

Отметим, сравнительные исследования акустических свойств готовых МИ обычно выполняются с привлечением акустических и голографических методов, а также методов телевизионной спектроскопии. Применение этих методов является достаточно дорогостоящим и трудоёмким делом. Кроме того, результаты экспериментальных исследований готовых МИ не позволяют анализировать и прогнозировать их свойства на ранней стадии - стадии разработки и проектирования изделий.

При исследовании динамических свойств элементов конструкций МИ традиционно основное внимание уделяется струне как генератору колебаний. Значительно меньше работ посвящено исследованиям корпусных элементов конструкций: как излучателей, так и резонаторов звука. Практически во всех работах генератор, излучатель и резонатор звука рассматриваются отдельно, как парциальные динамические системы. По существу отсутствуют работы, в которых МИ рассматривается целиком как связанная упруго-акустическая система.

Следует иметь в виду, что все перечисленные выше работы, посвящённые теоретическим и экспериментальным исследованиям динамики элементов конструкций МИ, содержат лишь отдель-

ные, достаточно разрозненные результаты. Во многих работах отсутствуют исходные данные. Эти обстоятельства не позволяют воспользоваться опубликованными данными, даже для сопоставительного анализа результатов.

1.5. Цели и задачи работы

Анализ существующих разработок позволяет сделать следующие выводы:

- Динамические свойства корпусных элементов конструкций струнных МИ исследованы недостаточно.
- Ввиду отсутствия современных расчетных моделей и программных средств совершенствование МИ выполняется в основном эмпирически, путём проб и ошибок.
- Недостаточно проработаны вопросы, связанные с влиянием конструктивных факторов на динамические свойства корпусных элементов струнных МИ.
- Не исследовано влияние предварительного натяжения струн на спектр колебаний МИ.
- Отсутствует детальный анализ влияния демпфирования на динамические характеристики элементов МИ.

Целью настоящей работы является создание методики расчета и проектирования корпусных элементов конструкций МИ, разработка на базе методики современных программных средств.

В диссертации ставятся и решаются следующие задачи:

1. Разработка расчётной динамической модели корпусных элементов МИ, как тонкостенных предварительно напряженных конструкций с асимметричным набором рёбер жёсткости.

2. Обоснование достоверности расчетной модели путем тестирования и сопоставления результатов расчётов с известными данными.

3. Проведение серии экспериментальных исследований деформирования и колебаний элементов МИ с целью апробации расчетной модели.

4. Экспериментальное определение физико-механических характеристик с целью идентификации конструкционных материалов.

5. Экспериментальная оценка влияния акустической внутренней полости и струн на спектр собственных колебаний деки.

6. Расчётно-экспериментальное исследование упругих перемещений и напряжённого состояния, индуцированного натяжением струн колками.

7. Исследование статических и динамических податливостей точек крепления струн к деке.

8. Оценка влияния уровня демпфирования на АЧХ резонансной деки.

9. Анализ влияния схемы и размеров подкреплений на спектр колебаний деки.

2. Методика расчета корпусных элементов конструкций музыкальных струнных инструментов

Во второй главе приводится описание методики расчёта. Элементы корпуса МИ рассматриваются в виде тонкостенных конструкций, подкреплённых рёбрами жесткости. Учитываются асимметрия подкрепления и нелинейности, связанные с влиянием мембранных усилий на изгибную жесткость стенки. Мембранные усилия определяются в зависимости от предварительного натяжения струн. Используется один из вариантов МКЭ, основанный на смешанной вариационной формулировке принципа Хеллингера-Рейсснера и теории тонких оболочек Тимошенко. Расчетные соотношения строятся на основе независимой аппроксимации перемещений и деформаций. Применяются криволинейные оболочечный и стержневой КЭ. Задача динамики описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Амплитуды установившихся колебаний определяются путем разложения движения по собственным формам. Для решения задачи на собственные значения применяется метод итераций в подпространстве собственных векторов.

2.1. Система разрешающих уравнений

Для вывода разрешающих уравнений, описывающих малые колебательные движения, воспользуемся МКЭ и принципом возможных перемещений в сочетании с принципом Даламбера. В качестве примера рассмотрим гитарную деку. Представим её

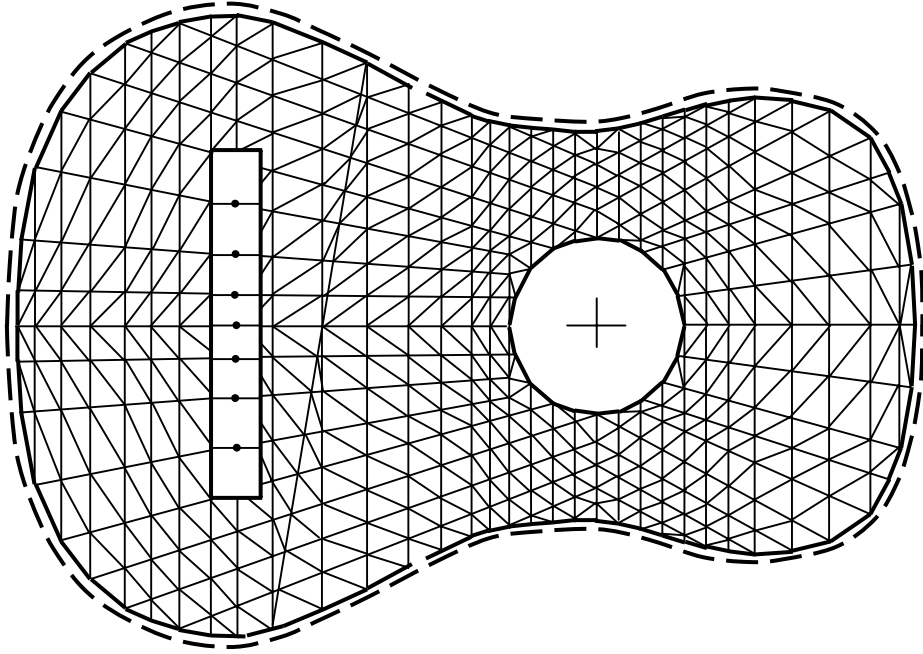


Рис. 2.1. Конечно-элементная модель гитарной деки

в виде ансамбля тонкостенных оболочечных и стержневых КЭ (рис.2.1).

Согласно принципу возможных перемещений работа внешних и внутренних сил, включая силы инерции и силы сопротивления движению, на малых виртуальных отклонениях системы равна нулю:

$$\sum_{n=1}^N \left[\iint_S \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dS + \iint_S \delta\{u\}^T [m_0] \{\ddot{u}\} dS + \iint_S \delta\{u\}^T [b] \{\dot{u}\} dS - \right. \\ \left. - \iint_S \delta\{u\}^T \{p\} dS - \iint_S \delta\{\vartheta\}^T [N_0] \{\vartheta\} dS \right] = 0 \quad (2.1)$$

Здесь n – порядковый номер КЭ, N – число КЭ, δ – знак виртуальной вариации, S – площадь КЭ, $\{\varepsilon\}$ – вектор деформаций, $\{\sigma\}$ – вектор напряжений, $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$ и $\{\ddot{u}\}$ – векторы обобщенных перемещений, скоростей и ускорений (точка определяет операцию дифференцирования функции по времени), $\{\vartheta\}$ – вектор углов поворота поперечного сечения, $[N_0]$ – матрица мембранных усилий, $\{p(t)\}$ – вектор внешних нагрузок, $[m_0]$ – матрица инерцион-

ных характеристик, $[b]$ – матрица коэффициентов сопротивления. Интегралы (2.1) вычисляются в произвольный момент времени t .

В соответствии с процедурой МКЭ используется следующая аппроксимация упругих перемещений в пределах КЭ:

$$\{u(\alpha_1, \alpha_2, t)\} = [\Phi(\alpha_1, \alpha_2)] \{q^{(n)}(t)\}, \quad (2.2)$$

где $\{u\}$ – вектор перемещений, $[\Phi]$ – матрица интерполяционных функций, $\{q^{(n)}\}$ – вектор обобщенных перемещений узлов КЭ, α_1 и α_2 – криволинейные пространственные координаты.

Дифференцируя функции перемещений (2.2) по пространственным координатам, находим углы поворота поперечного сечения (нормали):

$$\{\mathcal{Q}\} = [Q]\{u\} = [Q][\Phi]\{q^{(n)}(t)\}. \quad (2.3)$$

Здесь $[Q]$ – матрица дифференциальных операторов.

Зависимости напряжений от деформаций описываем при помощи модели линейно-упругого тела и формул обобщенного закона Гука

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.4)$$

где $[D]$ – матрица упругих постоянных материала.

Далее, используя подстановки (2.2), (2.3) и (2.4), перепишем (2.1) в следующем виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left[\iint_S \delta\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} dS - \iint_S \delta\{u\}^T \{p\} dS + \right. \\ \left. + \{q\}^T \left[[M^{(n)}]\{\ddot{q}\} + [B^{(n)}]\{\dot{q}\} - [R^{(n)}]\{q\} \right] \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $[M^{(n)}]$, $[B^{(n)}]$ и $[R^{(n)}]$ – матрицы масс; демпфирования и геометрической жесткости, или начальных напряжений КЭ. Коэффициенты этих матриц определяются следующими выражениями:

$$[M^{(n)}] = \iint_S [\Phi]^T [m] [\Phi] dS, \quad (2.6)$$

$$[B^{(n)}] = \iint_S [\Phi]^T [b] [\Phi] dS, \quad (2.7)$$

$$[R^{(n)}] = \iint_S ([Q] [\Phi])^T [N_o] [Q] [\Phi] dS. \quad (2.8)$$

В свою очередь компоненты вектора деформаций $\{\varepsilon\}$ выражаем через перемещения. С этой целью воспользуемся дифференциальными соотношениями типа Коши

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad \text{или} \quad [L]\{u\} - \{\varepsilon\} = 0, \quad (2.9)$$

где $[L]$ – матрица дифференциальных операторов.

Расчетные соотношения МКЭ строятся на основе смешанной вариационной формулировки принципа Хеллингера-Рейсснера [26, 104, 172]:

$$\sum_{n=1}^N \left[\iint_S ([L]\delta\{u\})^T [D]\{\varepsilon\} dS - W(\delta\{u\}) \right] = 0, \quad (2.10)$$

$$\sum_{n=1}^N \left[\iint_S \delta\{\varepsilon\}^T [D]([L]\{u\} - \{\varepsilon\}) dS \right] = 0 \quad (2.11)$$

Здесь $W(\delta\{u\})$ – работа внешних сил на возможных перемещениях в момент времени t , определяется следующим выражением:

$$W(\delta\{u\}) = \iint_S \delta\{u\}^T \{p\} dS - \delta\{q\}^T ([M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} - [R]\{q\}). \quad (2.12)$$

Отметим, смешанная вариационная формулировка (2.10) и (2.11) предполагает независимое варьирование перемещений и деформаций. Из вариационного уравнения (2.10) следуют условия равновесия, из (2.11) – условия непрерывности.

Для деформаций $\{\varepsilon\}$ применяется следующая аппроксимация

$$\{\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, t)\} = [\omega(\alpha_1, \alpha_2)]\{\beta(t)\}, \quad (2.13)$$

где $[\omega]$ – матрица интерполяционных функций, $\{\beta\}$ – вектор произвольных постоянных.

Подставляя интерполяционные функции (2.2) и (2.13) в вариационные уравнения (2.10) и (2.11), получим

$$\sum_{n=1}^N [\delta \{\beta\}^T ([G^{(n)}]^T \{q\} - [H^{(n)}] \{\beta\})] = 0, \quad (2.14)$$

$$\sum_{n=1}^N [\delta \{q\}^T ([G^{(n)}]^T \{\beta\} - \{P\} + [M^{(n)}] \{\ddot{q}\} + [B^{(n)}] \{\dot{q}\} - [R^{(n)}] \{q\})] = 0. \quad (2.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} [G^{(n)}] &= \iint_S [\omega]^T [D][L][\Phi] dS, \quad [H^{(n)}] = \iint_S [\omega]^T [D][\omega] dS, \\ \{F^{(n)}\} &= \iint_S [\Phi]^T \{p\} dS. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Обозначим

$$[C^{(n)}] = [G^{(n)}]^T [H^{(n)}]^{-1} [G^{(n)}]. \quad (2.17)$$

Очевидно, что $[C^{(n)}]$ – это матрица жесткости КЭ.

Исключая из уравнений (2.14) и (2.15) вектор $\{\beta\}$ и суммируя по n согласно алгоритма ансамблирования МКЭ [36, 43, 47, 48, 82, 121], с учетом (2.17) получим систему линеаризованных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + ([C] - [R])\{q\} = \{F(t)\}. \quad (2.18)$$

Здесь $[M]$, $[B]$, $[C]$ и $[R]$ – матрицы, характеризующие инерционные, диссипативные и упругие свойства конструкции, как ансамбля КЭ; $\{F(t)\}$ – вектор обобщенных вынуждающих сил. Предполагается, что источником возбуждения элементов корпуса МИ являются колебательные движения струн.

В свою очередь, предварительное натяжение струн инициирует начальное НДС. Параметры НДС находятся из решения системы алгебраических уравнений вида

$$[C]\{q_m\} = \{F_m\}, \quad (2.19)$$

где $\{F_m\}$ – вектор нагрузки, соответствующей предварительному натяжению струн.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (2.18) описывает вынужденные колебания предвари-

тельно напряженной динамической системы относительно равновесного состояния (2.19).

2.2. Конечный элемент тонкостенной оболочки из ВКМ

Для расчета тонкостенных пластин и оболочек разработано большое число разнообразных КЭ. Описания некоторых из них содержатся в работах [12, 35 – 37, 43, 47, 48, 118]. В этих работах, как правило, для вывода расчетных соотношений МКЭ используются классические гипотезы Кирхгофа-Лява и метод перемещений, основанный на вариационной формулировке принципа Лагранжа и процедуре кусочной интерполяции перемещений. В этом случае условие сходимости приближенного решения МКЭ к точному предъявляет к интерполяционным функциям (функциям формы) следующие требования:

- Функции перемещений и их производные должны быть достаточно гладкими и сохранять непрерывность при переходе через границы КЭ.
- Функции перемещений должны включать слагаемые, отражающие смещения КЭ, как жесткого целого.

Эти требования определяют класс допустимых интерполяционных функций. В противном случае КЭ приобретает нежелательные свойства, он не обеспечивает "хорошую" сходимость и вносит существенные погрешности в решение. Неудачный выбор функций формы приводит к необходимости чрезмерно мелкого деления конструкции на КЭ и, как следствие, – к неоправданным расходам ресурсов ЭВМ.

Область применимости большинства известных оболочечных КЭ ограничена традиционными, то есть однородными и изотропными материалами. Однако для изготовления элементов корпуса

МИ обычно используется резонансная древесина, в последнее время – полимерные композиты (углепластики, стеклопластики и др.) [10, 44, 55, 92, 133]. В отличие от традиционных материалов естественные и искусственные волокнистые композиты (ВКМ) обладают ярко выраженной анизотропией физико-механических свойств. Для них характерна неоднородная слоисто-волокнистая структура.

При выборе КЭ следует иметь в виду и геометрические особенности. Форма поверхностей корпуса МИ бывает как плоской, так и искривленной. Их отличает разнообразная, чаще всего довольно сложная конфигурация контура, а также наличие отверстий и вырезов, переменные толщина стенки и кривизна поверхности.

Известно, что при расчете тонкостенных слоистых конструкций из ВКМ важно учитывать деформации поперечного сдвига и силы инерции, связанные с поворотом нормали. Учет сдвиговых деформаций в рамках классической формулировки метода перемещений, как правило, приводит к появлению ложных деформаций и, тем самым, вносит существенную погрешность в решение [104]. Эти недостатки сглаживаются при использовании смешанной вариационной формулировки. Независимая аппроксимация перемещений и деформаций позволяет, в частности, минимизировать энергию ложных деформаций.

Таким образом, особенности конструкции, характерные для корпусных элементов МИ, предъявляют следующие требования к КЭ:

- КЭ должны быть универсальными, пригодными для аппроксимации поверхностей произвольной гауссовой кривизны при сложной конфигурации контура.

- Расчетные соотношения должны строиться с учетом анизотропии физико-механических свойств, слоисто-волокнутой структуры материала и отражать заданное распределение толщин стенки.

- Жесткость стенки на изгиб должна рассчитываться с учетом мембранных усилий, обусловленных предварительным натяжением струн.

Перечисленным требованиям наилучшим образом отвечает треугольный КЭ Б.Г. Попова [104]. Это – универсальный КЭ с поверхностью произвольной гауссовой кривизны. Он имеет 30 степеней свободы и предназначен для аппроксимации разнообразных поверхностей (рис.2.2).

Конечно-элементные зависимости для треугольного КЭ [104] строятся на основе независимой интерполяции перемещений (2.2) и деформаций (2.13). При этом

$$\begin{aligned}
 [\Phi] &= [[\Phi]_{(1)}, [\Phi]_{(2)}, [\Phi]_{(3)}, [\Phi]_{(4)}, [\Phi]_{(5)}, [\Phi]_{(6)}], \\
 \{q\} &= \left\{ \{q\}_{(1)}^T, \{q\}_{(2)}^T, \{q\}_{(3)}^T, \{q\}_{(4)}^T, \{q\}_{(5)}^T, \{q\}_{(6)}^T \right\}^T, \\
 \{q\}_{(i)} &= \{u_{1(i)}, u_{2(i)}, w_{(i)}, \psi_{1(i)}, \psi_{2(i)}\}^T,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

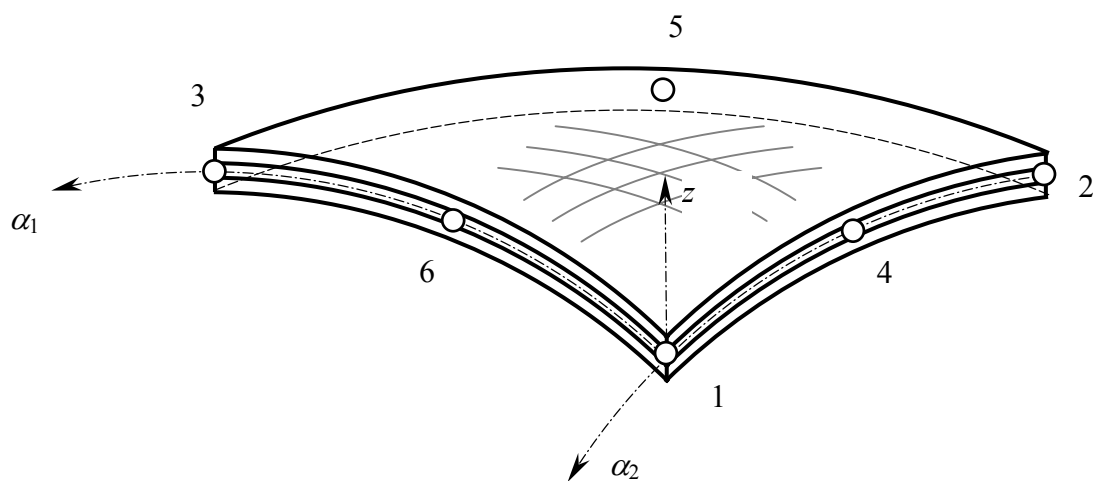


Рис.2.2. Конечный элемент многослойной оболочки

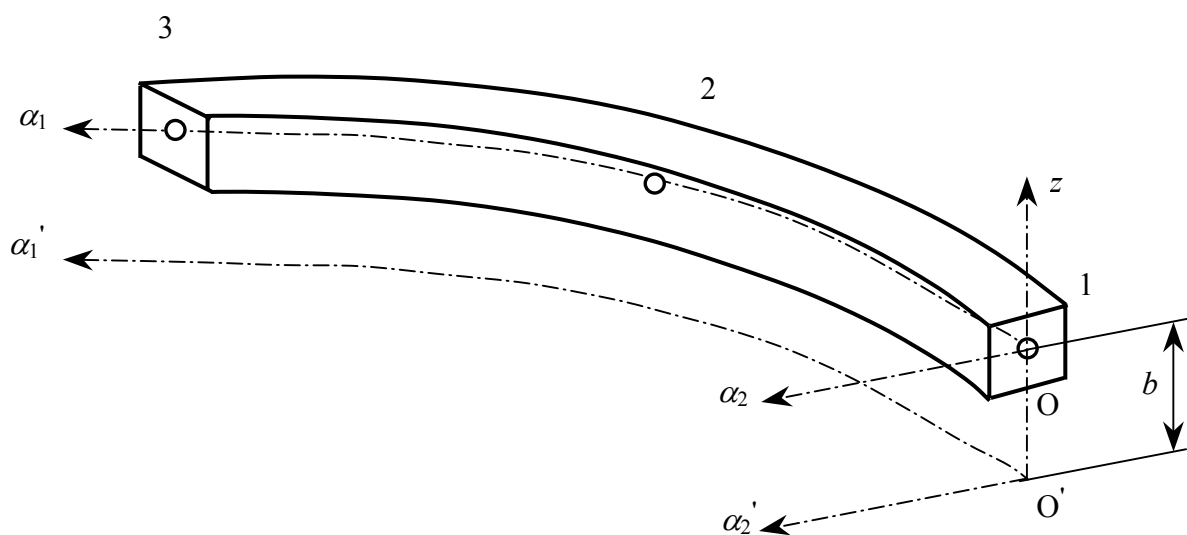


Рис.2.3. Стержневой конечный элемент

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}, \gamma_{31}, \gamma_{32}\}^T.$$

Здесь $u_1(i), u_2(i), w(i), \psi_1(i), \psi_2(i)$ – составляющие вектора линейного и углового перемещений узла i ($i=1, 2, \dots, 6$); $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и γ_{12} – линейные и угловая деформации базисной координатной поверхности; χ_1, χ_2 и χ_{12} – изменения кривизн и крутка; γ_{31} и γ_{32} – деформации поперечного сдвига. Матрица интерполяционных функций $[\Phi]$ имеет размерность (5×30) и блочную структуру заполнения. Каждый блок определяется равенством $[\Phi]_{(i)} = \phi_i[E]$, где $[E]$ – единичная матрица (5×5) . Базисные функции ϕ_i записываются в L – координатах (естественные или барицентрические координатах) в виде

$$\phi_1 = L_1(2L_1 - 1); \phi_2 = L_2(2L_2 - 1); \phi_3 = L_3(2L_3 - 1); \quad (2.21)$$

$$\phi_4 = 4L_1L_2; \phi_5 = 4L_2L_3; \phi_6 = 4L_3L_1.$$

В свою очередь L – координаты выражаются через пространственные координаты α_1 и α_2 [1, 104]. При этом нумерация ϕ_i ($i = 1, \dots, 6$) согласуется с нумерацией узлов КЭ.

Для интерполяции обобщенных деформаций $\{\varepsilon\}$ используются полные полиномы. При этом число независимых компонент вектора $\{\beta\}$ равно 24. Берётся разность между общим числом степеней свободы КЭ и числом независимых форм движения КЭ, как жесткого целого. В результате матрица $[\omega]$ получает размерность (8×24) .

Считаем, что в общем случае стенка имеет перекрестную схему армирования: волокна составляют углы $\pm\varphi$ с главной координатной осью α_1 . Число однонаправленных слоев (монослоев) в пакете принимаем $2k$. Монослои предполагаем ортотропными и линейно-упругими, связи волокон и связующего, а также отдельных слоёв друг с другом – идеальными.

При симметричном армировании соотношения упругости многослойного пакета имеют вид [1, 27, 104]:

$$\{N\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.22)$$

$$\{N\} = \{N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2\}^T,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ \hline C_{11} & C_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{22} \end{bmatrix},$$

где $(B_{11}, C_{11}, D_{11}) = \sum_{j=1}^k g_{11j} H_{12j}(t_{Bj}, t_{Cj}, t_{Dj})$,

$$(B_{12}, C_{12}, D_{12}) = \sum_{j=1}^k g_{12j}(t_{Bj}, t_{Cj}, t_{Dj}),$$

$$(B_{33}, C_{33}, D_{33}) = \sum_{j=1}^k g_{44j} H_{12j}(t_{Bj}, t_{Cj}, t_{Dj}), \quad (1, 2);$$

$$K_{22} = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{H_{12j} t_{Bj}}{g_{55j}} \right]^{-1}, \quad K_{11} = h^2 \left[\sum_{i=1}^k \frac{H_{21j} t_{Bj}}{g_{66j}} \right]^{-1};$$

$$H_{12j} = \frac{2 + k_2(z_j + z_{j-1})}{2 + k_1(z_j + z_{j-1})}, \quad (1, 2);$$

$$t_{Bj} = z_j - z_{j-1}, \quad t_{Cj} = \frac{(z_j^2 - z_{j-1}^2)}{2}, \quad t_{Dj} = \frac{(z_j^3 - z_{j-1}^3)}{3}.$$

Здесь j – порядковый номер слоя (каждый слой состоит из двух монослоёв), h – толщина стенки, z_{j-1} и z_j – нормальные координаты соответственно внутренней и наружной поверхностей j -го слоя (отсчитываются от базисной координатной поверхности и в случае переменной толщины стенки являются функциями коор-

динат α_1 и α_2), k_1 и k_2 – главные кривизны координатной поверхности оболочки, g_{nmj} ($m, n = 1, 2, 4, 5, 6$) – коэффициенты матрицы упругости, связывающие напряжения и деформации j -го слоя.

Коэффициенты g_{nmj} определяются в зависимости от угла армирования φ и коэффициентов упругости монослоя на основании известных соотношений [52]. Коэффициенты упругости монослоя, записанные в главных осях, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} g_{11}^0 &= E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}), & g_{12}^0 &= \nu_{21} E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}), & g_{22}^0 &= E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}), \\ g_{44}^0 &= G_{12}, & g_{21}^0 &= g_{12}^0, & g_{55}^0 &= G_{32}, & g_{66}^0 &= G_{31}. \end{aligned}$$

Здесь E_1 , E_2 – модули упругости, G_{12} , G_{31} и G_{32} – модули сдвига, ν_{12} и ν_{21} – коэффициенты Пуассона. Индекс 1 соответствует направлению оси α_1 , индекс 2 – оси α_2 , индекс 3 – направлению нормали к координатной поверхности оболочки. Эти характеристики называются эффективными упругими постоянными. Они определяются в зависимости от упругих характеристик волокна и матрицы, а также объемной доли волокон в композите.

Симметричные матрицы $[B]_{(3 \times 3)}$, $[D]_{(3 \times 3)}$, $[C]_{(3 \times 3)}$ и $[K]_{(2 \times 2)}$ характеризуют приведенные мембранные, изгибные, мембранно-изгибные и сдвиговые жёсткости пакета слоев. В случае симметричной, по толщине пакета слоёв, структуры базисная координатная поверхность совмещается со срединной поверхностью оболочки. В этом случае компоненты матрицы $[C]_{(3 \times 3)}$ обращаются в нули. При переменных параметрах армирования и толщинах стенки коэффициенты матриц приведенных жёсткостей являются функциями координат α_1 и α_2 .

Обобщенные деформации выражаются через перемещения с помощью соотношения (2.9), где

$$\{u\} = \{u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2\}^T, \quad (2.23)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \nabla_1 & \varphi_{12} & k_1 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \nabla_2 & k_2 & 0 & 0 \\ \nabla_2 - \varphi_{12} & \nabla_1 - \varphi_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1 & \varphi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{21} & \nabla_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_2 - \varphi_{12} & \nabla_1 - \varphi_{21} \\ -k_1 & 0 & \nabla_1 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & \nabla_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\nabla_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}$; $\varphi_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}$ ($1 \leftrightarrow 2$), A_1 и A_2 – параметры

Ламэ.

Распределение перемещений по толщине пакета слоев описывается на основе гипотез Тимошенко. Считается, что

$$v_1 = u_1 + z\psi_1 \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad v_3 = w, \quad (2.24)$$

где u_1 , u_2 и w – тангенциальные и нормальная составляющие перемещения точки базисной координатной поверхности $z = 0$; ψ_1 и ψ_2 – углы поворота прямой, нормальной до деформирования к координатной поверхности.

При выводе выражения для матрицы геометрической жёсткости используется формула (2.8). Считается, что

$$[N_0] = \begin{bmatrix} N_1^0 & N_{12}^0 \\ N_{21}^0 & N_2^0 \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -\nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -\nabla_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Мембранные усилия N_1^0 , N_2^0 и N_{12}^0 от предварительного натяжения струн определяются на основании решения (2.19).

Матрица масс КЭ определяется формулой (2.6). При этом

$$[m] = \text{diag} [m_0, m_0, m_0, I_1, I_2].$$

Здесь m_0 – погонная масса; I_1 , I_2 – моменты инерции массы m_0 относительно координатных осей α_1 и α_2 .

Кинематические граничные условия, или условия на перемещения задаются путем исключения из разрешающей системы тех уравнений, которые соответствуют заданным (нулевым) перемещениям. Этот вычислительный прием достаточно эффективен, он сохраняет симметрию матриц.

Интегралы (2.6), (2.7), (2.8), (2.16) вычисляются численно посредством семиточечной схемы квадратур Гаусса на треугольной области.

2.3. Стержневой конечный элемент

Для моделирования подкреплений (пружинок) выбирается криволинейный стержневой КЭ, совместимый с оболочечным КЭ [104]. Элемент имеет 3 узла, по 3 степени свободы в каждом (рис.2.3). Осевая линия КЭ на расстояние b равноудалена от координатной поверхности оболочки.

Перемещения произвольной точки КЭ определяются выражением

$$\{u\} = [\Phi]\{s\}. \quad (2.26)$$

Деформации выражаются зависимостью

$$\{\varepsilon\} = [\omega]\{\alpha\} \quad (2.27)$$

Здесь $[\Phi]$ - матрица интерполяционных функций размерности (3x9). Она имеет следующую структуру заполнения

$$[\Phi] = [[\Phi]_{(1)}, [\Phi]_{(2)}, [\Phi]_{(3)}].$$

Каждый блок определяется равенством $[\Phi]_i = \phi_i[E]$, где $[E]$ - единичная матрица (3x3). Базисные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2\xi^2 - 3\xi + 1, & \phi_2 &= -4\xi^2 + 4\xi, \\ \phi_3 &= 2\xi^2 - \xi, & \xi &= (\alpha_1 - \alpha_1^{(1)})/(\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(1)}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(3)}$ – координаты первого и третьего узлов КЭ (рис.2.3). Нумерация функций ϕ_i соответствует нумерации узлов.

В свою очередь матрица $[\omega]$ имеет размерность (3х6) и блочную структуру заполнения

$$[\omega] = \text{diag}[[F], [F], [F]], \quad [F] = [1-\xi, \xi]. \quad (2.29)$$

В качестве обобщенных перемещений узлов и обобщённых деформаций принимаем:

$$\{s\}_{(i)} = \{u_{(i)}, w_{(i)}, \theta_{(i)}\}^T; \quad (2.30)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon, \kappa, \psi\}^T. \quad (2.31)$$

Здесь $u_{(i)}$, $w_{(i)}$ – перемещения узла i ($i = 1, 2, 3$) в направлениях α_1 и z соответственно, $\theta_{(i)}$ – угол поворота поперечного сечения стержня (узла i) относительно оси α_2 , ε – линейная деформация, κ – изменение кривизны оси стержня, ψ – деформация поперечного сдвига.

Считаем, что многослойный стержень включает k слоев. Каждый слой имеет свою структуру и физико-механические свойства материала. Оси α_2 и z – главные центральные оси поперечного сечения. Упругие свойства монослоя описываем при помощи модели ортотропного тела. Соотношения упругости записываем в форме (2.22), где

$$\{N\} = \{N, M, Q\}^T, \quad (2.32)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}.$$

При этом $d_{11} = \sum_{j=1}^k E_j f_j t_{1j}$, $d_{12} = d_{21} = \sum_{j=1}^k E_j f_j t_{2j}$, $d_{22} = \sum_{j=1}^k E_j f_j t_{3j}$,

$$d_{33} = \sum_{j=1}^k G_{13j} f_i t_{1j}, \quad t_{1j} = z_j - z_{j-1}, \quad t_{2j} = \frac{(z_j^2 - z_{j-1}^2)}{2}, \quad t_{3j} = \frac{(z_j^3 - z_{j-1}^3)}{3}.$$

Здесь j – порядковый номер слоя, z_{j-1} и z_i – нормальные координаты соответственно внутренней и наружной поверхностей j -го слоя, E_j и G_{13j} – модуль упругости и модуль сдвига, f_j – ширина j -го слоя.

Далее, при помощи соотношений (2.9) выражаем деформации через перемещения. Считая перемещения и деформации малыми, в рамках линейного приближения записываем:

$$[L] = \begin{bmatrix} \nabla & k & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \\ -k & \nabla & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Здесь $\nabla = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha}$, k – изменение кривизны оси стержня.

Матрица масс КЭ определяется формулой (2.6). При этом

$$[m] = \text{diag}[m_0, m_0, J_2]. \quad (2.34)$$

Здесь m_0 и J_2 – соответственно погонная масса и момент инерции массы m_0 относительно оси α_2 .

В связи с тем, что стержневые КЭ расположены асимметрично относительно срединной поверхности оболочки, процедуре формирования разрешающих уравнений (2.18) и (2.19) предшествует процедура преобразований матриц вида

$$[\tilde{C}^{(n)}] = [T][C^{(n)}][T']^{-1}, \quad [\tilde{M}^{(n)}] = [T][M^{(n)}][T']^{-1}. \quad (2.35)$$

При этом

$$[T] = \text{diag}[[T], [T], [T]], \quad [T'] = \text{diag}[[T'], [T'], [T']],$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица масс $[M^{(n)}]$ и матрица жесткости $[C^{(n)}]$ стержневого КЭ определяются формулами (2.6) и (2.17). Только в этом случае интегралы вычисляются не по площади, а по длине КЭ. Для чис-

ленного интегрирования применяется пятиточечная схема квадратур Гаусса.

2.4. Расчет собственных форм и частот

Собственные колебания предварительно напряженной динамической системы без демпфирования описываются однородной системой линейных дифференциальных уравнений

$$[M]\{\ddot{q}\} + [\tilde{C}]\{q\} = 0, \quad (2.36)$$

где $[\tilde{C}] = [C] - [R]$ – приведенная матрица жесткости конструкции. Для систем высокой размерности (в нашем случае порядка 10000) одним из наиболее эффективных вычислительных методов решения задач на собственные значения является метод обратных итераций.

Ограничимся расчетом p низших собственных форм и частот, причем $p \ll m$, где m – порядок разрешающих уравнений. В этом случае наиболее рациональным оказывается улучшенный вариант метода итераций – метод итераций в подпространстве собственных векторов [11, 53].

Решение (2.36) находим в виде

$$\{q(t)\} = e^{j\omega t} \{w\}. \quad (2.37)$$

В результате задача (2.36) сводится к алгебраической проблеме на собственные значения

$$[\tilde{C}]\{w_j\} = \omega_j^2 [M]\{w_j\}, \quad (2.38)$$

где ω_j и $\{w_j\}$ – соответственно собственное число и собственный вектор ($j = 1, 2, \dots, p$).

Согласно алгоритму метода итераций в подпространстве предварительно строится начальное подпространство с матрицей $[X_0]$ размерности $(r \times m)$. При формировании матрицы $[X_0]$ для

ускорения сходимости используются единичные векторы. Причем, одновременно считаются не p , а $r = \min(2p, p+8)$ собственных векторов. Этот приём позволяет при вычислении наибольшего собственного значения λ_p обеспечить заданную точность (до 6 значащих цифр) не более, чем за 9 итераций.

Решение (2.38) находим при помощи процедуры обратных итераций для r собственных векторов:

$$\begin{aligned}
 [Y_0] &= [M][X_0] \\
 [\tilde{C}][\bar{X}_\kappa] &= [\bar{Y}_{\kappa-1}] \\
 [X_\kappa] &= [\bar{X}_\kappa][Q_\kappa] \\
 [Y_\kappa] &= [M][X_\kappa]
 \end{aligned}
 \quad \leftarrow \quad (2.39)$$

с одновременным проектированием матриц на подпространство

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_\kappa \end{bmatrix} = [\bar{X}_\kappa]^T [\tilde{C}][\bar{X}_\kappa], \quad \begin{bmatrix} \hat{M}_\kappa \end{bmatrix} = [\bar{X}_\kappa]^T [M][\bar{X}_\kappa]. \quad (2.40)$$

и решением задачи на собственные значения подпространства

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_\kappa \end{bmatrix} [Q_\kappa] = \begin{bmatrix} \hat{M}_\kappa \end{bmatrix} [Q_\kappa] [\Lambda_\kappa], \quad (2.41)$$

где $[A]$ – диагональная матрица с элементами $\lambda_j = \omega_j^2$, κ – номер итерации.

В результате преобразований (2.40) имеет место редукция размерности задачи с m до r , как правило $r \ll m$. Задача (2.41) с редуцированными симметричными матрицами решается методом Якоби. Критерием сходимости итерационного процесса является условие $(\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(k-1)})/\lambda_j^{(k)} \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-6}$ – заданная точность. Для контроля правильности вычислений используется последовательность Штурма.

2.5. Расчет амплитуд установившихся колебаний

Рассмотрим силовое моногармоническое возбуждение

$$\{F(t)\} = \{F_0\} \sin(\Omega t). \quad (2.42)$$

Здесь Ω – круговая частота, $\{F_0\}$ – вектор амплитуд нагрузки.

При расчете резонансных амплитуд необходимо учесть эффекты демпфирования колебаний. Основные результаты исследований процессов демпфирования изложены в классических работах В.В. Болотина [21], В.Л. Бидермана [18], Я.Г. Пановко [86], Г.С. Писаренко [102], В.А. Постнова [107] и многих других исследователей. В этих работах рассматриваются традиционные однородные и изотропные материалы. В работах П.А. Зиновьева [49 – 51, 180] построена энергетическая теория демпфирования анизотропных тел и многослойных волокнистых композитов.

Для описания рассеяния энергии колебаний корпусных элементов МИ воспользуемся моделью пропорционального демпфирования [11, 18, 45]. В этом случае уравнения движения (2.18) приводятся к несвязанной форме. Считаем [11]

$$[B] = M \sum_{j=1}^p \gamma_j [M^{-1} \tilde{C}]^j, \quad (2.43)$$

где γ_k – параметры Рэлея. Они определяются из решения системы p уравнений:

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{\omega_j} + \gamma_2 \omega_j + \gamma_3 \omega_j^3 + \dots + \gamma_p \omega_j^{(2p-3)} \right). \quad (2.44)$$

Здесь ξ_j и ω_j – относительное демпфирование и круговая частота для j -ой собственной формы (определяются на основе экспериментальных данных). В общем случае количество коэффициентов демпфирования ξ_j равняется p . При $p = 2$ уравнение (2.44) приводится к классической формуле Рэлея:

$$[B] = \gamma_1[M] + \gamma_2[\tilde{C}], \quad (2.45)$$

$$2\xi_j\omega_j = \gamma_1 + \gamma_2\omega_j^2.$$

Первое слагаемое (2.45) учитывает “внешнее” трение, второе – “внутреннее” трение, связанное с рассеянием энергии в материале.

Значения коэффициентов демпфирования ξ_j на резонансных частотах ω_j для разнообразных элементов конструкций МИ оказываются различными, поэтому получить единые данные на все случаи практически невозможно. Имеющиеся данные об интенсивности рассеяния энергии колебаний получены путём обработки экспериментальных данных для конкретных условий [113, 127].

В условиях ограниченной информации с некоторым приближением можно воспользоваться экстраполяцией [178]:

$$\xi_j = \xi_1 \left(\frac{\omega_j}{\omega_1} \right)^e, \quad (0,5 \leq e \leq 0,7). \quad (2.46)$$

Для первой собственной формы $\xi_1 = \delta/2\pi$, где δ – логарифмический декремент колебаний (определяется экспериментально).

Колебательные движения деки представляются в виде линейной комбинации (суперпозиции) p низших собственных форм. Принимается

$$\{q(t)\} = [\Phi]\{Z(t)\}. \quad (2.47)$$

Здесь $[\Phi] = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p]$ – матрица, составленная из p низших собственных форм, $\{Z(t)\}$ – главные, или нормальные координаты.

В этом случае

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[M][\Phi] &= \text{diag}[1] \\ [\Phi]^T[B][\Phi] &= \text{diag}[2\xi_j\omega_j] \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$[\Phi]^T [\tilde{C}] [\Phi] = \text{diag}[\omega_j^2]$$

Уравнения (2.18), записанные в главных координатах, принимают следующий вид

$$\ddot{Z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{Z}_j + \omega_j^2 Z_j = f_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (2.49)$$

Здесь $\{f_j(t)\} = [\Phi]^T \{F(t)\}$ – обобщенная сила, соответствующая j -ой собственной форме.

Отметим, что дифференциальные уравнения (2.49) относительно главных координат получаются несвязанными. Решение, соответствующее установившимся гармоническим колебаниям, имеет вид:

$$\{z_j(t)\} = \{z_{1j}\} \sin \Omega t + \{z_{2j}\} \cos \Omega t, \quad (2.50)$$

$$\text{где } z_{1j} = \beta_{1j} f_{0j} = \frac{\omega_j^2 - \Omega^2}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \Omega^2} \times f_{0j},$$

$$z_{2j} = \beta_{2j} f_{0j} = \frac{2\xi_j \omega_j^2 \Omega^2}{(\omega_j^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \Omega^2} \times f_{0j}.$$

Здесь β_{1j} , β_{2j} – динамические коэффициенты. Они определяют "вес" j -ой собственной формы. Линейная комбинация p низших собственных форм, взятых с определенными "весами", составляет форму вынужденных колебаний.

Далее выполняется обратный переход: из системы главных координат $z_j(t)$ переходим к обобщенным перемещениям $q(t)$. С этой целью используются линейные преобразования (2.47). Очевидно

$$\{q(t)\} = \{q_1\} \sin \Omega t + \{q_2\} \cos \Omega t, \quad (2.51)$$

$$\text{где } \{q_1\} = [\Phi] \text{diag}[\beta_{1j}] [\Phi]^T \{F_0\},$$

$$\{q_2\} = [\Phi] \text{diag}[\beta_{2j}] [\Phi]^T \{F_0\}.$$

Здесь $\{q_1\}$, $\{q_2\}$ – векторы амплитуд.

Выводы по главе 2

1. На базе МКЭ разработана методика расчёта корпусных элементов конструкций музыкальных струнных инструментов. Учитывается переменная кривизна поверхностей оболочек, сложная конфигурация контура, наличие отверстий и вырезов, переменная толщина стенки, слоисто-волокнуистая структура материала при выраженной анизотропии физико-механических свойств, наличие подкреплений стенок в виде асимметричного набора рёбер жесткости, начальное напряженное состояние, обусловленное предварительным натяжением струн. Методика реализована в виде компьютерной программы.

2. На основе принципа возможных перемещений и МКЭ построена разрешающая система уравнений, которая описывает вынужденные колебания предварительно напряженной динамической системы относительно равновесного состояния. Учитываются нелинейности, связанные с влиянием мембранных усилий на изгибную жесткость стенки. При выводе расчетных соотношений применяются вариационная формулировка принципа Хеллингера-Рейсснера и теория тонких оболочек Тимошенко. Используется независимая аппроксимация перемещений и деформаций.

3. Представлен вычислительный алгоритм расчета установившихся амплитуд. Колебания элементов корпуса, обусловленные периодическими движениями струн, записаны в виде суперпозиции низших собственных форм. Алгебраическая проблема на собственные значения решается методом итераций в подпространстве собственных векторов. Диссипативные свойства конструкции описываются при помощи модели пропорционального демпфирования Рэлея. Приведён алгоритм расчета характеристик демпфирования.

3. Анализ расчетной модели МКЭ

В третьей главе представлена конструкция и расчетная конечно-элементная модель гитарной деки. Результаты расчёта упругих перемещений деки в зависимости от натяжения струн колками сопоставлены с данными эксперимента. Выполнено тестирование и сравнительная оценка эффективности и точности расчетной модели МКЭ. С этой целью проведён расчет ряда тонкостенных конструкций.

3.1. Конструкция и расчетная модель деки

Адекватность расчетной модели проанализируем на примере реальной конструкции. Рассмотрим корпус семиструнной классической гитары модели 386-А с мензурой $L = 540$ мм, изготовленной на Бобровской фабрике музыкальных инструментов (г.Бобров). Элементами корпуса являются обечайка, контробечайка, дека, дно ("донья"), подставка для струн (струнодержатель), рёбра жёсткости (пружинки). Обечайка и две контробечайки образуют гнутую конструкцию, которая носит название рамки корпуса.

Наибольший практический интерес представляет дека, непосредственно связанная со струнами. Качество деки во многом определяет качество МИ в целом.

На рис.3.1 изображен чертеж деки (вид со стороны внутренней полости). Размеры на чертеже указаны в мм. Дека имеет круглое резонаторное отверстие, она представляет однослойную тонкую пластинку, по форме напоминающую восьмерку. Нижний овал восьмёрки больше верхнего.

В свою очередь пластинка или резонансный щит – это составная конструкция, склеенная из отдельных дощечек древеси-

ны. Количество дощечек обычно – от 5 до 7. Каждая дощечка плучается путем радиальной распиловки заготовок. Направление волокон древесины совмещается с направлением струн.

К наружной поверхности пластинки приклеена подставка для крепления струн. На рис.3.1 она показана пунктиром.

К внутренней поверхности пластинки приклеены пружинки, при помощи которых регулируется жёсткость деки и тем самым осуществляется акустическая настройка МИ. Геометрия пружинок показана на рис.3.1, основные размеры даны в табл.1.

Таблица 1

Размеры подкреплений, мм						
	<i>П1</i>	<i>П2</i>	<i>П3</i>	<i>П4</i>	<i>П5</i>	<i>П6</i>
<i>L</i>	260	230	325	326	184	170
<i>L</i> ₁	80	55	65	55	0	40
<i>L</i> ₂	80	55	95	105	0	40
<i>H</i>	12	12	12	12	5,5	12
<i>H</i> ₁	6	2	5	8	5,5	6
<i>H</i> ₂	6	4	3	6	5,5	6
<i>B</i>	5	5	5	5	28	30

Пружинки представляют деревянные бруски прямоугольного поперечного сечения $B \times H$, имеющие по краям характерные скосы. Пружинки устанавливаются по обе стороны резонаторного отверстия и подставки для струн, перпендикулярно направлению волокон древесины. Одна из пружинок устанавливается под углом 10° – 15° . Представленная схема подкрепления является одной из наиболее распространённых схем.

По контуру пластинка приклеивается к торцам контробечайки. Контробечайка – своеобразный фигурный шпангоут, который

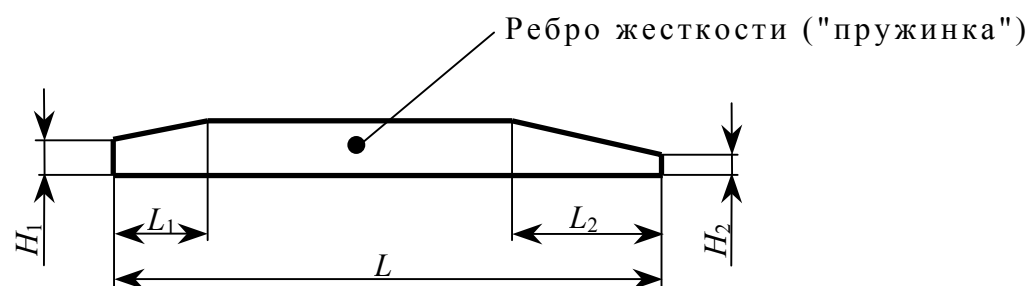
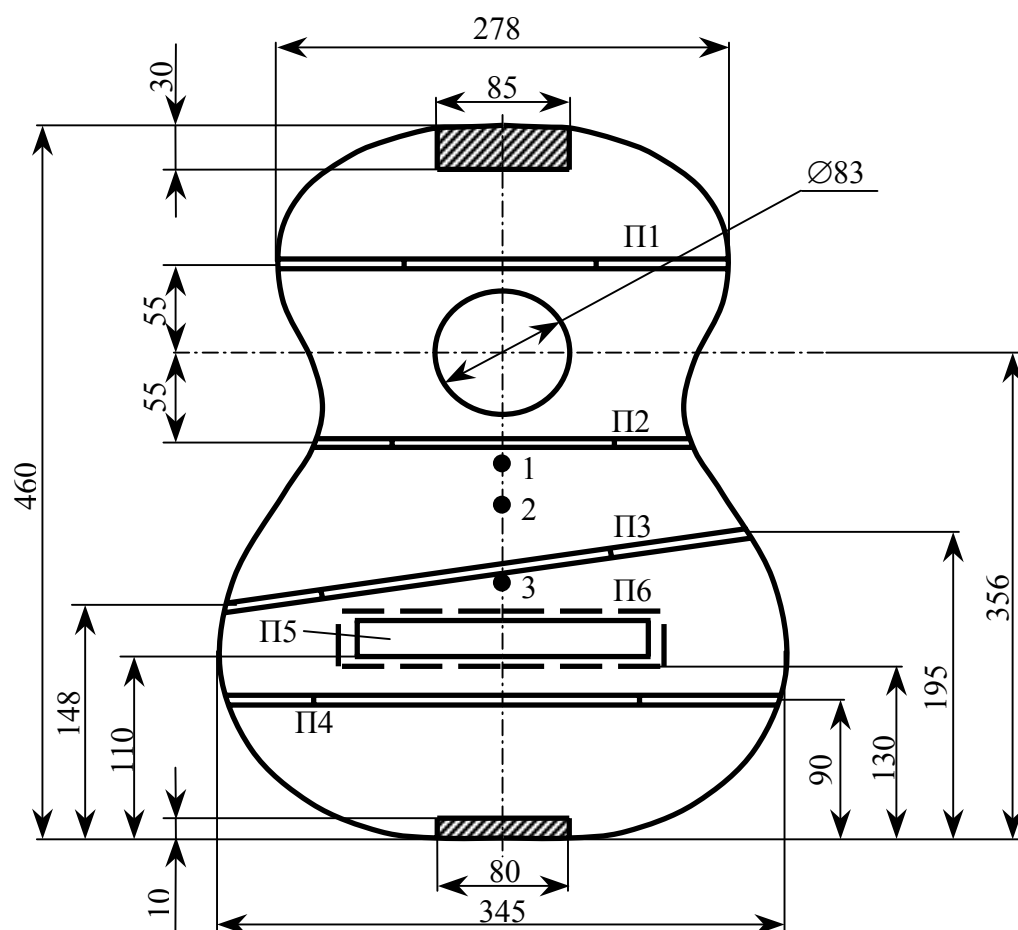


Рис.3.1. Дека гитары модели 386-А

обеспечивает жёсткость корпуса и увеличивает площадь контакта рамки с декой и дном. В свою очередь рамка корпуса усиливается двумя деревянными брусками (см. заштрихованные области на рис.3.1). Верхний брусок предназначен для крепления грифа.

Расчетная схема деки представляется в виде динамической системы с 9668 степенями свободы. Используется МКЭ. Пластика разбивается на 990 треугольных плоских КЭ, пружинки и подставка для струн – на 140 стержневых КЭ, совместимых с плоскими КЭ. Принципиальная дискретная схема изображена на рис.2.1. Конечно-элементная сетка строится симметрично относительно линии симметрии деки. В области отверстия используются более мелкие КЭ.

При моделировании деки возникает проблема схематизации соединения деки с контрбечайкой. С этой целью реализуются как шарнирное закрепление, так и жесткое защемление деки по линии контура. Шарнирное закрепление моделируется путём “запрета” линейных перемещений ($u=v=w=0$), защемление – линейных и угловых перемещений ($u=v=w=\theta_1=\theta_2=0$). Здесь u , v , w , θ_1 , θ_2 – линейные перемещения и углы поворота нормали в узловых точках, расположенных по линии контура.

3.2. Упругое деформирование деки: Расчет и эксперимент

Дека является предварительно напряженной конструкцией. Натяжение струн колками индуцирует начальное НДС. Исследуем упругое деформирование гитарной деки. Рассмотрим три варианта конструкции: вариант 1 соответствует неподкрепленной схеме, вариант 2 – симметричной схеме, вариант 3 – асимметричной схеме подкрепления (рис.3.2).

На основании данных [61], полученных для классической гитары, примем следующие значения сил предварительного натяжения струн: $P_1 = 71$ Н, $P_2 = 72$ Н, $P_3 = 125$ Н, $P_4 = 105$ Н, $P_5 = 100$ Н, $P_6 = 105$ Н, $P_7 = 101$ Н. Здесь нижний индекс обозначает порядковый номер струны. Номера присваиваются в порядке возрастания – от тонкой (дискантовой) к толстой (басовой) струне. Отметим, что система внешних сил не является симметричной. Суммарная нагрузка, действующая на деку со стороны натянутых струн, составляет 679 Н (~69,2 кГ).

Начальное НДС определяется на основании решения (2.19). Упругие свойства древесины описываются моделью ортотропного тела. Физико-механические характеристики материала выбираются из табл.7 (стр.88). Пластика изготовлена из резонансной ели, подставка для струн – из бука, пружинки – из сосны.

На рис.3.3 показаны эпюры прогибов, построенные вдоль линии симметрии пластинки. Для зашеченной и шарнирно-опёртой по линии контура дек формы прогибов получаются подобными и достаточно близкими друг другу. Это означает, что граничные условия на контуре (шарнир или заделка) оказывают слабое влияние на прогибы пластинки.

Черными кружками на рис. 3.3 отмечены прогибы деки 3, снятые экспериментально. Для измерений использовался индикатор часового типа.

Анализ результатов показывает, что жёсткость на изгиб деки 3 получается больше, чем деки 1 – почти в 6 раз, и чем деки 2 – в 1,3 раза. Оценка жёсткости произведена по величине, обратной максимальному прогибу. Максимальный прогиб деки 1 равен 4,5 мм, что превышает толщину пластинки $h = 3$ мм. В этом случае взаимные смещения кромок отверстия составляют около 4 мм.

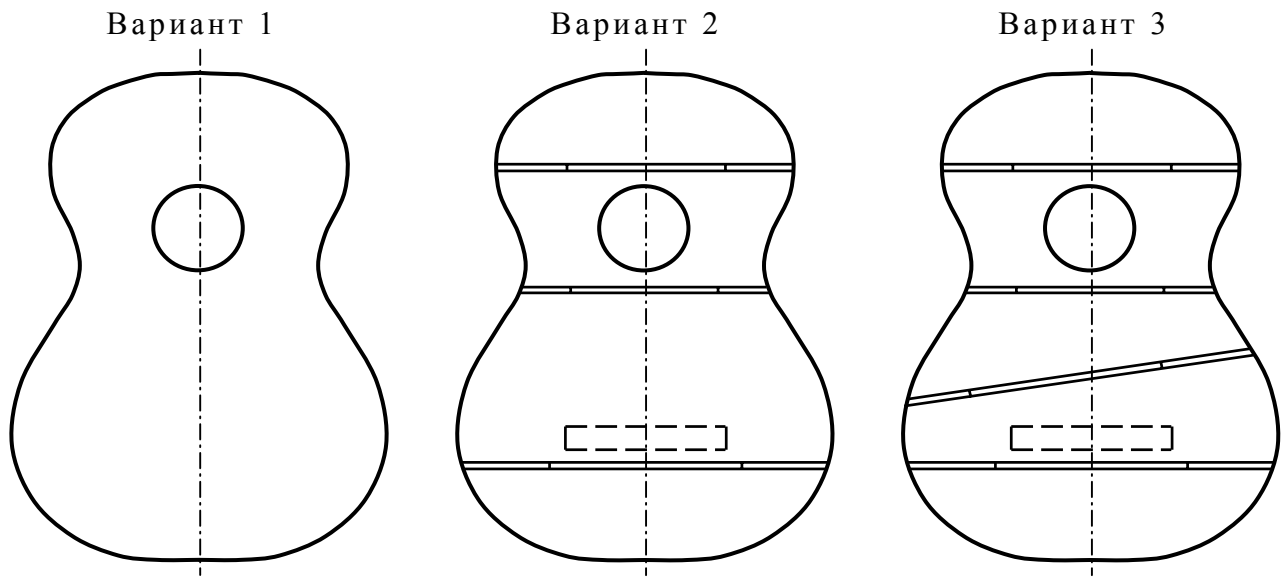


Рис.3.2. Варианты конструкций гитарной деки

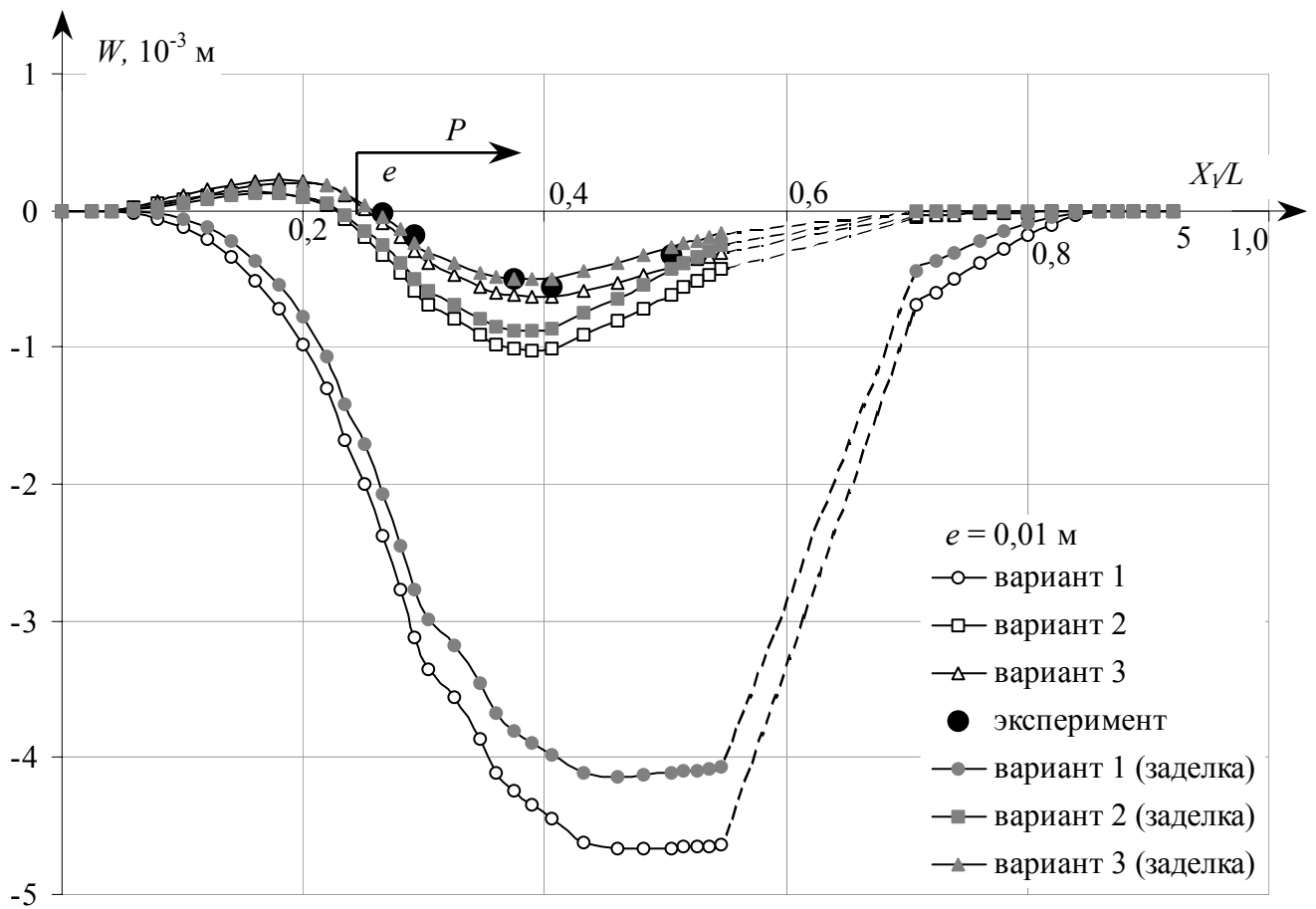


Рис.3.3. Эпюра прогибов гитарной деки

Подкрепление деки рёбрами жёсткости уменьшает прогибы и выравнивает форму деформирования. Таким образом, пружинки обеспечивают дополнительную жёсткость, предохраняя деку от больших прогибов под действием сил предварительного натяжения струн.

3.3. Тестирование. Расчёт пластинок

С целью оценки точности расчётной модели МКЭ рассмотрим ряд задач статики, динамики и устойчивости пластинок. Расчётные перемещения, собственные частоты и критические нагрузки, соответствующие потере устойчивости, сопоставим с данными известных аналитических и численных решений. Исследуем сходимость приближенных решений МКЭ к точным аналитическим решениям.

3.3.1. Задача статики

Рассмотрим изгиб квадратной пластинки со стороной $a = 0,4\text{ м}$, толщиной стенки $h = 2 \cdot 10^{-3}\text{ м}$ под действием распределенной нагрузки интенсивности $q = 12,5 \cdot \text{кН/м}^2$. При описании упругих свойств используем две расчетные модели материала:

- Изотропное тело ($E = 200\text{ ГПа}$, $\nu = 0,3$).
- Ортотропное тело ($E_1 = 20\text{ ГПа}$, $E_2 = 200\text{ ГПа}$, $\nu_{12} = 0,03$, $\nu_{21} = 0,3$, $G_{12} = 286,2\text{ ГПа}$).

На рис.3.4 изображена расчетная схема пластинки, шарнирно-опертой по контуру. В табл.2 представлены результаты расчетов. На рис.3.5 и 3.6 показаны графики сходимости, полученные для изотропного материала.

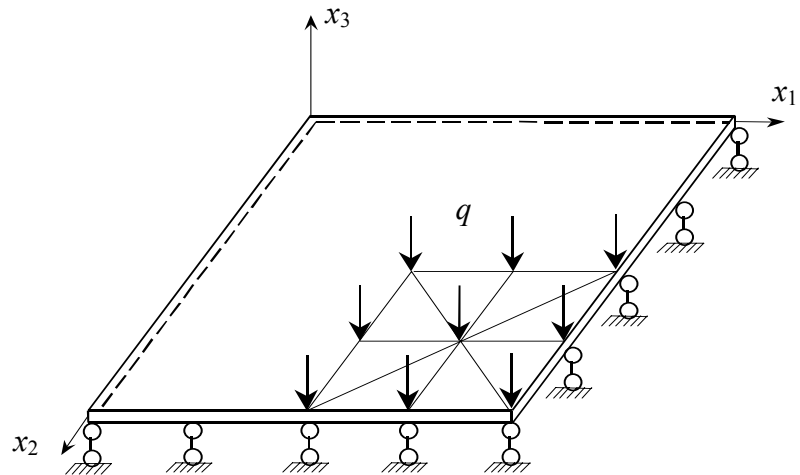
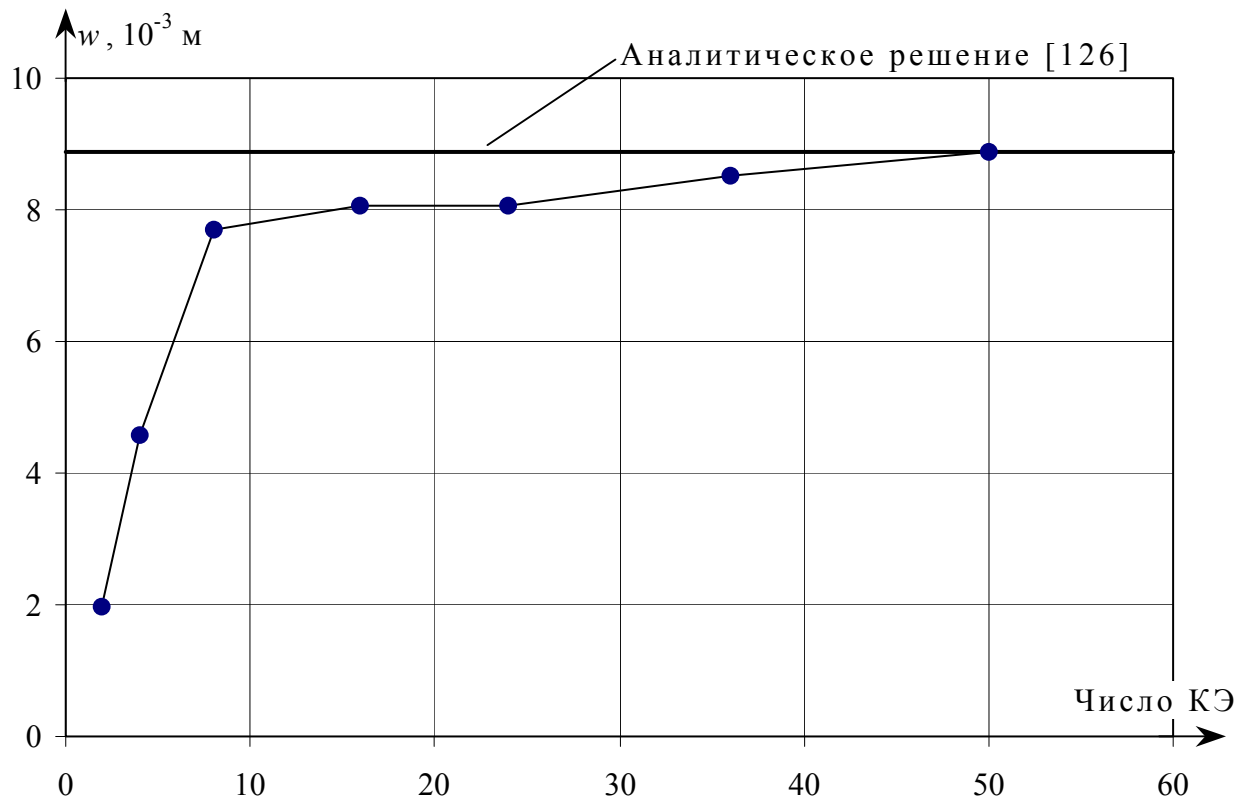
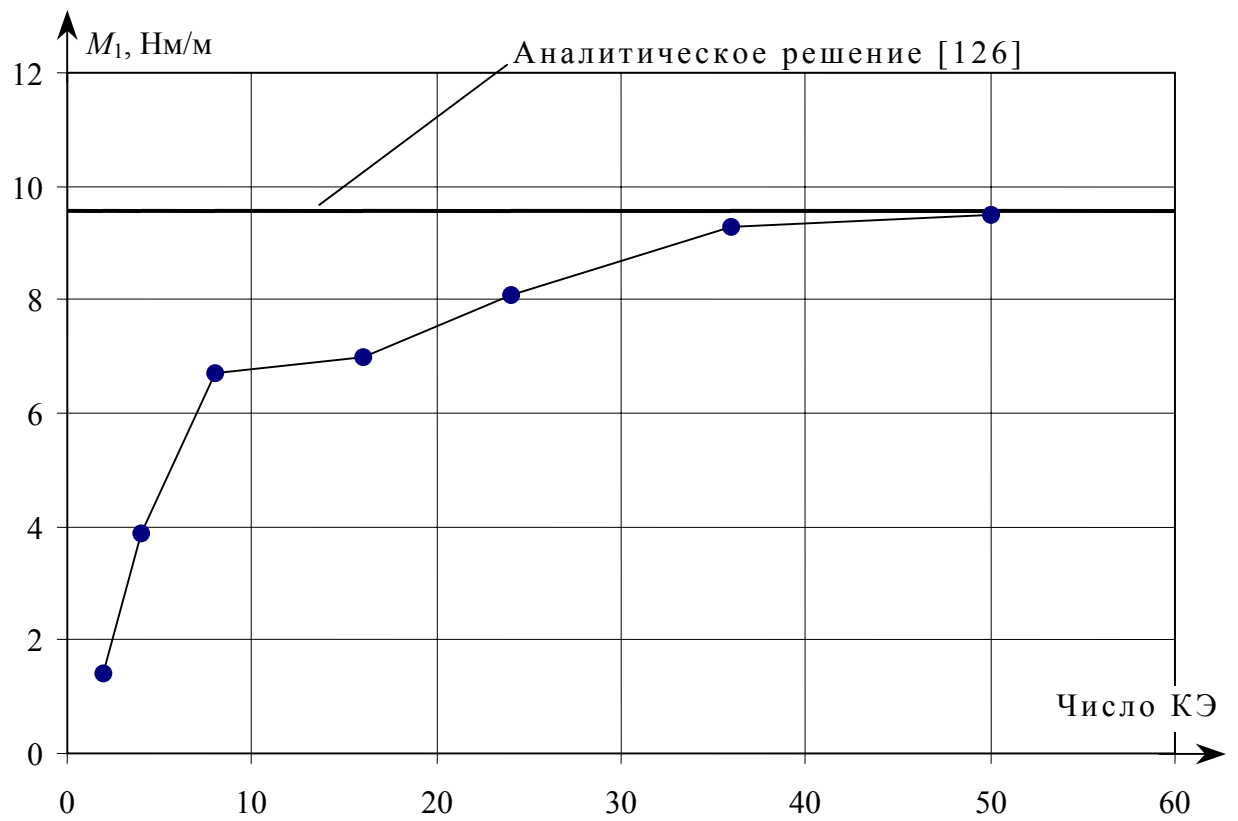


Рис.3.4. Пластика, шарнирно-опертая по контуру

Таблица 2

Число КЭ	Изотропное тело		Ортотропное тело	
	$w, \cdot 10^{-3} \text{ м}$	$M_1, (\text{Нм})/\text{м}$	$w, \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$M_2, (\text{Нм})/\text{м}$
2	1,96	1,4	0,509	1,4
4	4,57	3,9	1,16	7,3
8	7,69	6,7	1,85	12
16	8,05	7	2,05	12,1
24	8,06	8,1	2,06	12,3
36	8,52	9,3	2,08	14,7
50	8,87	9,5	2,11	16,2
Решение [126]	8,87	9,58	2,14	19,3

Рис.3.5. Зависимость прогиба w от числа КЭРис.3.6. Зависимость изгибающего момента M_1 от числа КЭ

Констатируем, при числе КЭ $N = 36$ расчетные перемещения и усилия отличаются от результатов аналитического решения [126] менее чем на 3%.

3.3.2. Задача динамики

Выполним расчет собственных частот квадратной пластинки, жестко защемленной по контуру (рис.3.7). Сторона пластинки $a = 0,4$ м, толщиной стенки $h = 10^{-2}$ м, плотность материала $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³. Используем две модели материала:

- Изотропное тело ($E = 198$ ГПа, $\nu = 0,3$).
- Ортотропное тело ($E_1 = 19,8$ ГПа, $E_2 = 198$ ГПа, $\nu_{12} = 0,03$, $\nu_{21} = 0,3$, $G_{12} = 7$ ГПа, $G_{13} = 19,6 = 19,6$ ГПа)

Для дискретизации пластинки используем регулярную конечно-элементную сетку с числом КЭ $N = 256$. Результаты вычислений сопоставим с данными классических решений, полученных на основе дифференциальных уравнений собственных колебаний: для изотропного материала

$$\partial^4 w / \partial x^4 + 2 \partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 + \rho h \partial^2 w / \partial t^2 = 0, \quad (3.1)$$

для ортотропного материала

$$D_{11} \partial^4 w / \partial x^4 + 2 D_{12} \partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + D_{22} \partial^4 w / \partial y^4 + \rho h \partial^2 w / \partial t^2 = 0 \quad (3.2)$$

Здесь $w(x, y, t)$ – нормальный прогиб; D_{11} и D_{22} – цилиндрические жесткости в главных осях упругости; D_{12} – смешанная жесткость. Главные направления упругости совмещаются с направлениями координатных осей x_1 и x_2 .

Для пластинки, защемленной по контуру, согласно аналитическим решениям (3.1) и (3.2), частоты собственных колебаний определяются формулой [22]:

$$\omega_j = \alpha_j \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho h}}, \quad (3.3)$$

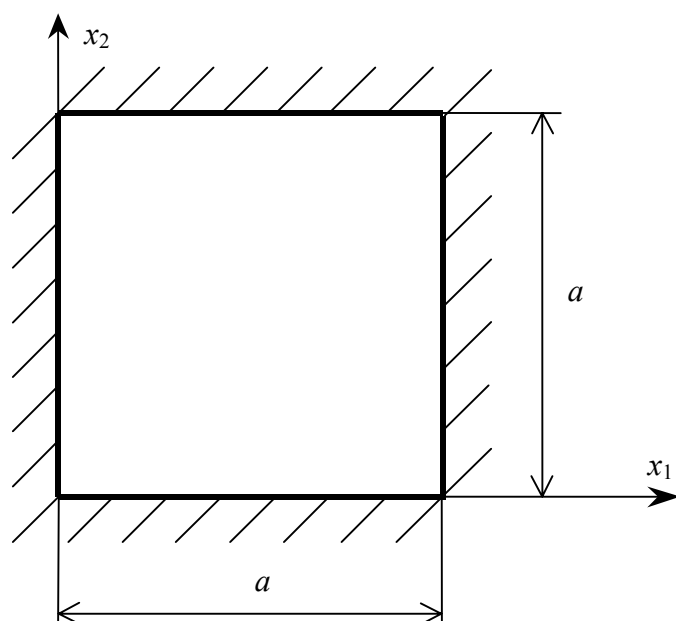


Рис.3.7. Пластика, защемленная по контуру

Таблица 3

m	n	Наше решение	Решение АМ[22]	Решение [164]
1	1	3,647	3,556	3,646
1	2	7,452	7,386	7,437
2	1	7,452	7,386	7,437
2	2	10,941	10,889	10,965
1	3	13,420	13,337	13,393
3	1	13,485	13,337	13,393
2	3	16,695	16,656	16,717
3	2	16,695	16,656	16,717
3	3	22,146	22,222	—
71	4	21,615	21,313	—
4	1	21,615	21,313	—
2	4	24,621	24,540	24,631
4	2	24,735	24,540	—
3	4	29,838	29,960	—
4	3	29,838	29,960	—
4	4	37,177	37,556	—

где α_j – безразмерный коэффициент для j -ой собственной формы ($j = 1, 2, \dots, p$), p – число расчетных собственных форм. В случае изотропного тела $D_{11} = D$.

В табл.3 представлены расчетные коэффициенты α_j для первых 16 форм колебаний изотропной пластинки, в табл.4 – для ортотропной пластинки (учитываются первые 11 собственных форм). Величины m и n – целые числа, определяющие форму колебаний. Результаты вычислений сопоставлены с данными классического решения [22], полученного асимптотическим методом (АМ) и решения [164], выполненного в двойных тригонометрических рядах (рассматривались первые шесть членов ряда).

Из сопоставительного анализа данных табл.3 следует, что первая расчетная собственная частота отличается от аналитического решения [164] на 0,03%. Для высших частот это различие составляет менее 0,1%. Причем, полученное решение МКЭ оказывается ближе к [164], чем классическое решение АМ [22].

Таблица 4

m	n	Наше решение	Решение АМ [22]
1	1	7,654	7,570
2	1	10,147	9,971
3	1	15,504	14,936
1	2	19,725	20,137
2	2	21,334	21,587
4	1	23,857	22,249
3	2	25,062	25,060
4	2	31,754	30,898
1	3	37,678	39,064
2	3	38,942	40,300
3	3	41,943	42,965

В свою очередь, из табл.4 видно, что расчетная первая собственная частота пластинки из ортотропного материала отличается от аналитического решения [22] на 1%. Для высших частот различие результатов не превышает 4%.

3.3.3. Задача устойчивости

Проведём анализ влияния мембранных усилий на изгибную жесткость стенки. Для этого рассмотрим задачу устойчивости равновесия тонкой пластинки под действием сжимающих внешних нагрузок. Для решения задачи воспользуемся уравнением (2.36), в котором $[R]$ – матрица геометрической жесткости, или начальных напряжений. Она учитывает влияние мембранных усилий на изгибную жесткость стенки. Очевидно, при достижении сжимающими нагрузками некоторых определенных значений матрица жесткости $[C-R]$ окажется вырожденной. Это условие соответствует потере устойчивости типа дивергенции по первой собственной форме (изгибной форме равновесия).

Таким образом, варьируя внешние нагрузки и определяя соответствующие им собственные частоты, находим такие значения, для которых низшая собственная частота обращается в нуль. Полученные значения соответствуют критическим нагрузкам.

Рассмотрим квадратную пластинку со смешанными ГУ на контуре: стороны $x_1 = 0$ и $x_2 = a$ – жестко защемлены, две другие – шарнирно оперты по контуру (рис.3.8).

Пластинка сжимается в направлении оси x_1 распределенной нагрузкой интенсивности q (имеет место одноосное сжатие). Плоскость действия внешней нагрузки совмещается со срединной поверхностью пластинки. Нагрузка предполагается "мёртвой". Размеры пластинки: сторона $a = 0,4$ м; толщина $h = 10^{-2}$ м.

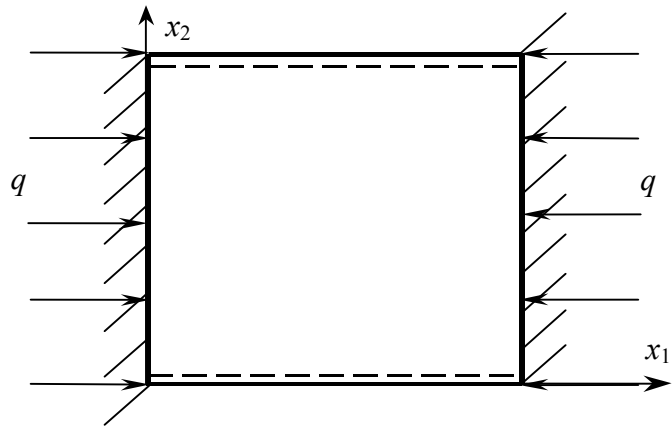
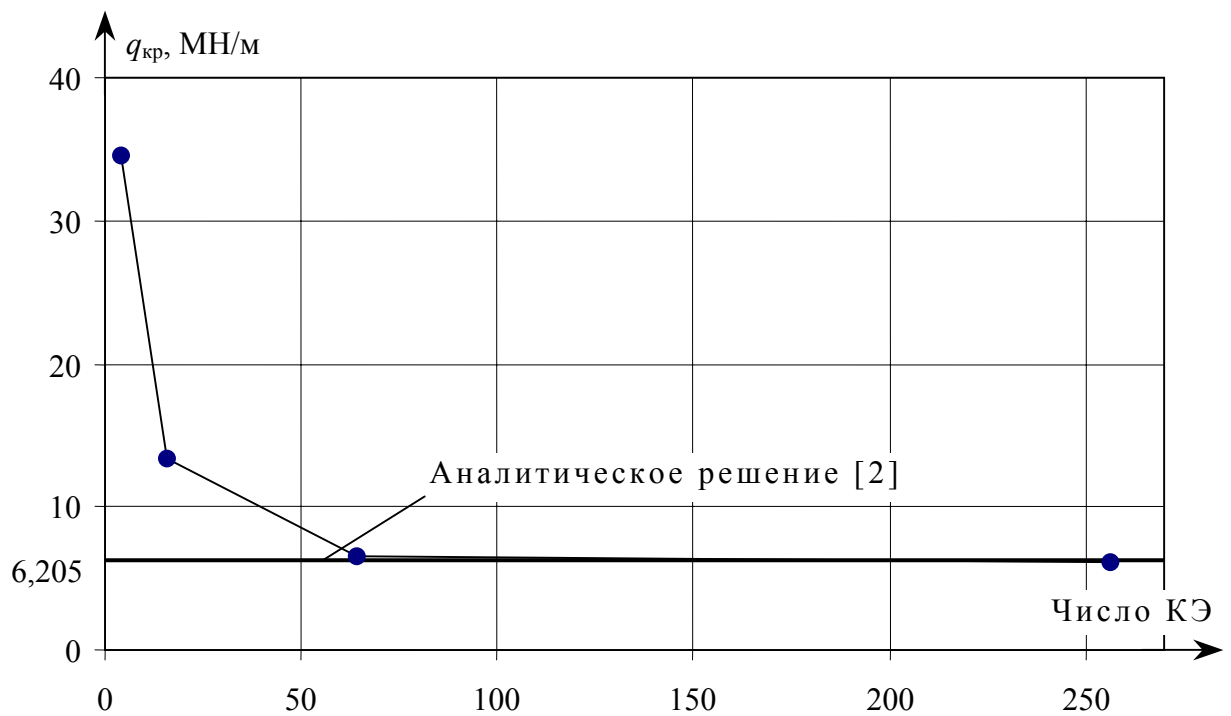


Рис.3.8. Расчетная схема пластинки

Таблица 5

Число КЭ	$q_{кр}, \cdot 10^6 \text{ Н/м}$
4	345,312
16	13,391
64	6,498
256	6,158
Аналитическое решение [2]	6,205

Рис.3.9. Зависимость критической нагрузки $q_{кр}$ от числа КЭ

Модуль упругости материала $E = 198$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

В табл.5 и на рис.3.9 представлен сравнительный анализ результатов расчета МКЭ с данными классического решения [2], полученного путем интегрирования дифференциального уравнения изгиба прямоугольной пластинки методом Галеркина. На основе анализа делаем вывод: при увеличении числа КЭ имеет место сходимость численного решения к точному аналитическому решению [2]. Причем, как и следовало ожидать, сходимость наблюдается "сверху". Этот результат объясняется тем, что расчетная модель МКЭ при крупной сетке, построенная на основе независимой интерполяции перемещений (2.2) и деформаций (2.13), получается более жесткой, чем реальная конструкция. При числе КЭ $N = 64$ относительная ошибка составляет 4,5%, при $N = 256$ – 0,76%.

В приложении 1 приведены дополнительные результаты расчетов тонких пластинок при различных ГУ на контуре. Результаты расчетов МКЭ сопоставлены с данными классических решений. Полученные данные подтверждают достоверность расчетной модели МКЭ.

Выводы по главе 3

1. Представлена расчетная модель деки классической гитары. Для схематизации деки использованы 990 треугольных плоских и 140 стержневых КЭ. Расчетная модель реализована в виде программного комплекса для ЭВМ.

2. В зависимости от натяжения струн колками исследовано упругое деформирование деки. Для трёх вариантов конструкций

подкрепления построены эпюры прогибов. Результаты вычислений подтверждаются данными эксперимента. Установлено:

- Схема подкрепления оказывает существенное влияние на жёсткость деки.

- ГУ по линии контура (шарнир или заделка) оказывают слабое влияние на формы прогибов.

3. На примере задачи изгиба тонкой пластинки исследована точность расчетной модели МКЭ. Путем сопоставительного анализа параметров НДС показано, что с уменьшением размеров КЭ имеет место сходимость приближенных решений МКЭ к точному аналитическому решению Тимошенко. Для получения приемлемой точности по напряжениям (ошибка в пределах 3%) требуется более мелкая конечно-элементная сетка, чем по перемещениям.

4. Рассмотрены собственные колебания тонкостенной прямоугольной пластинки при различных граничных условиях на контуре. Результаты вычислений МКЭ сопоставлены с классическими решениями Болотина и Игути. Установлено, при числе КЭ $N = 256$ имеет место хорошее их взаимное соответствие. Для первых шестнадцати форм колебаний различие собственных частот составляет менее 1%.

5. Проведен анализ влияния мембранных усилий на изгибную жесткость стенки. С этой целью рассмотрены задачи устойчивости равновесия тонких пластин при различных граничных условиях и схемах нагружения. Определены условия сходимости приближенных решений МКЭ. При числе КЭ $N = 64$ расчетные критические нагрузки, соответствующие первой собственной форме, достаточно хорошо согласуются с результатами точных аналитических решений. Сходимость решения "сверху" означает,

что расчетная модель МКЭ при крупной сетке получается более жесткой, чем реальная конструкция.

6. На основании анализа расчетной модели МКЭ заключаем: для получения достоверных результатов необходимо построение адекватных конечно-элементных схем. Адекватные схемы определяются на основе вариантного анализа путем исследования сходимости решений. При расчете пластинок при помощи оболочечных КЭ Попова [1, 104] следует строить ряд альтернативных дискретных схем и путем сопоставительного анализа результатов выбирать адекватную схему.

4. Экспериментальное исследование механических колебаний гитарной деки

В настоящей главе приведены результаты расчётно-экспериментальных исследований. Представлены методики измерений собственных форм и частот, констант демпфирования, амплитуд вынужденных колебаний. Определены физико-механические характеристики конструкционных материалов, установлены породы древесины. Построены амплитудно-частотные характеристики. Результаты физических экспериментов сопоставлены с данными расчётов МКЭ. Исследовано влияние акустической внутренней полости и струн на спектр колебаний деки. Использовались ультразвуковой метод, метод электротензометрии, методика Хладни и цифровой спектральный анализ [74, 123, 146, 147].

4.1. Экспериментальная установка

С целью исследования динамических свойств гитарной деки была спроектирована и изготовлена специальная установка, основными частями которой являются: система возбуждения колебаний, корпус МИ (гитары) и контрольно-измерительная аппаратура.

На рис.4.1 показан общий вид установки. Корпус гитары (без грифа и струн) жестко соединен с испытательным столом (3 на рис.4.1). Конструкция соединения исключает возможные движения корпуса относительно плоскости стола.

Система возбуждения колебаний включает: вибростенд электродинамический ВЭДС-10А (1 на рис.4.1) и центробежный вибратор (2 на рис.4.3). Возбуждение на деку передается от вибратора посредством специальной траверсы (1 на рис.4.3).



Рис.4.1. Общий вид экспериментальной установки (1 – вибростенд; 2 – тензометрический усилитель; 3 – стол испытательный)

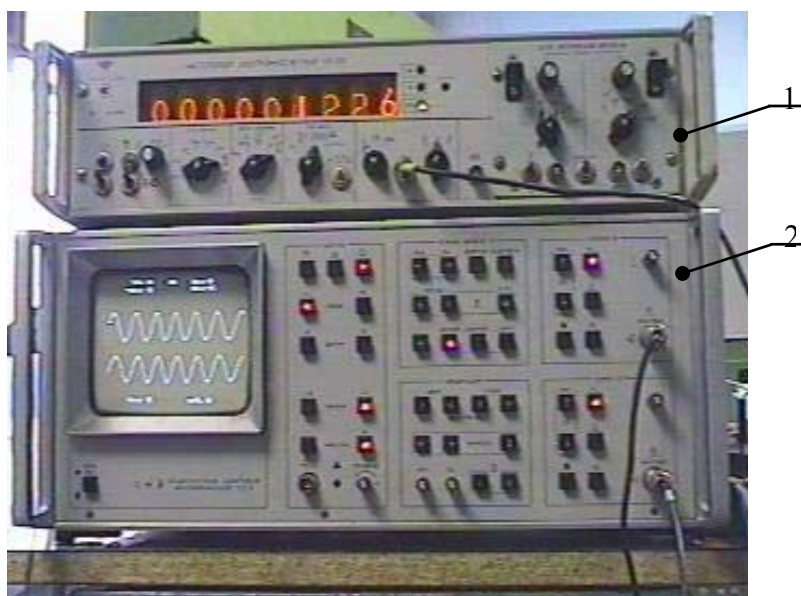


Рис.4.2. Приборы для измерений (1 – частотомер; 2 – осциллограф)



Рис.4.3. Система возбуждения колебаний (1– траверса;
2 – вибратор; 3 – тензометрический динамометр)

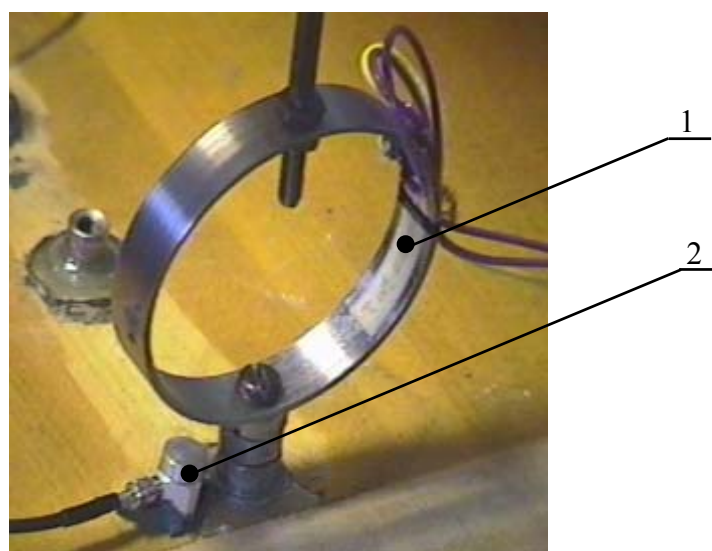


Рис.4.4. Тензометрический динамометр (1 – тензорезистор;
2 – акселерометр)

Для измерения вынуждающих сил разработан специальный кольцевой динамометр, или упругое "тензокольцо" (3 на рис.4.3). Диаметр кольца $d = 56$ мм, толщина стенки $h = 1,5$ мм, вес – 23 г. На внутреннюю поверхность кольца наклеивались проволоочные тензорезисторы конструкции ЦНИИСК с базой 10 мм (рис.4.4). Для этого использовался циакриновый клей. Тарировка кольцевого динамометра выполнялась путем проведения самостоятельного эксперимента.

Для определения виброускорений применялся миниатюрный пьезоэлектрический датчик KD-91 (Metra Meß – und Frequenztechnik Radebeul), или акселерометр (2 на рис.4.4). Вес датчика 1,8 г. Датчик жестко закреплялся на поверхности деки. Для этого использовалась специальная замазка.

Отметим, что кольцевой динамометр и траверса рассчитаны на дорезонансный режим работы. Геометрические и жесткостные параметры кольца и траверсы подобраны так, что их собственные частоты расположены выше исследуемого диапазона частот, т.е. выше 560 Гц.

Для регистрации результатов механических испытаний использовались четырехканальный тензометрический усилитель 4АНЧ-22 (2 на рис.4.1), частотомер электронно-счетный ЧЗ-34 (1 на рис.4.2) и цифровой запоминающий осциллограф С9-8 (2 на рис.4.2).

4.2. Анализ собственных форм. Фигуры Хладни

Для исследования низших собственных форм колебаний использовалась классическая методика Хладни [156].

Поверхность деки покрывалась тонким слоем мелкозернистого песка. Песок окрашивался в синий цвет. Затем включался виб-

ратор. При колебаниях на резонансных частотах песок смещался в области, прилегающие к узловым линиям. Это связано с тем, что прогибы на узловых линиях при колебаниях пластинки близки к нулю. Полученные песочные картины носят название фигур Хладни.

На рис.4.5, синим цветом, изображена фигура Хладни для деки без подкреплений, на рис.4.6 – для деки с подкреплениями. Конструкция подкрепления показана на рис.3.1. Представленные фигуры Хладни соответствуют низшим собственным формам. В первом случае (дека без подкреплений) – частота возбуждения $\nu_1 = 85 - 87$ Гц, во втором (дека с подкреплениями) – $\nu_1 = 116 - 120$ Гц.

Изображения получены при помощи цифровой фотокамеры и обработаны на компьютере. Зафиксировать изображение более высоких собственных форм оказалось затруднительным. Дело в том, что при вибрациях на более высоких частотах ($f > \nu_1$) песок быстро осыпался с поверхности деки. Песочный "узор" имел расплывчатые очертания и просматривался в чрезвычайно короткий промежуток времени.

Сопоставительный анализ фигур Хладни, представленных на рис.4.5 и 4.6, показывает, что усиление стенки ребрами жесткости видоизменяет низшую форму колебаний. Для деки с подкреплениями узловые линии расположены ближе к контуру пластинки, чем для деки без подкреплений. Форма колебаний подкрепленной деки соответствует конфигурации контура пластинки. Форма колебаний неподкрепленной деки скорее напоминает овал.

Формы собственных колебаний (рис.4.5 и 4.6), помимо методики Хладни, оценивались качественно при помощи акселерометра. Акселерометр последовательно устанавливался в различных точках поверхности деки. В каждой точке фиксировался



Рис.4.5. Первая форма колебаний деки без подкреплений



Рис.4.6. Первая форма колебаний деки с подкреплениями

сдвиг фаз двух гармонических сигналов: сигнала акселерометра относительно сигнала динамометра. Очевидно, колебания областей деки, разделенных узловыми линиями, находятся в противофазе. Результаты использования двух методик аналогичны.

4.3. Построение АЧХ и определение констант демпфирования

Исследуем поведение гитарной деки при моногармоническом силовом возбуждении. Считаем, что вынуждающая сила изменяется по закону

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t, \quad (4.1)$$

где F_0 и Ω – амплитуда и круговая частота соответственно. Вынуждающую силу прикладываем в трех разных точках (рис.4.7), этим самым уменьшаем вероятность попадания точки возбуждения на узловую линию. Направление вектора силы совмещаем с перпендикуляром к плоскости деки.

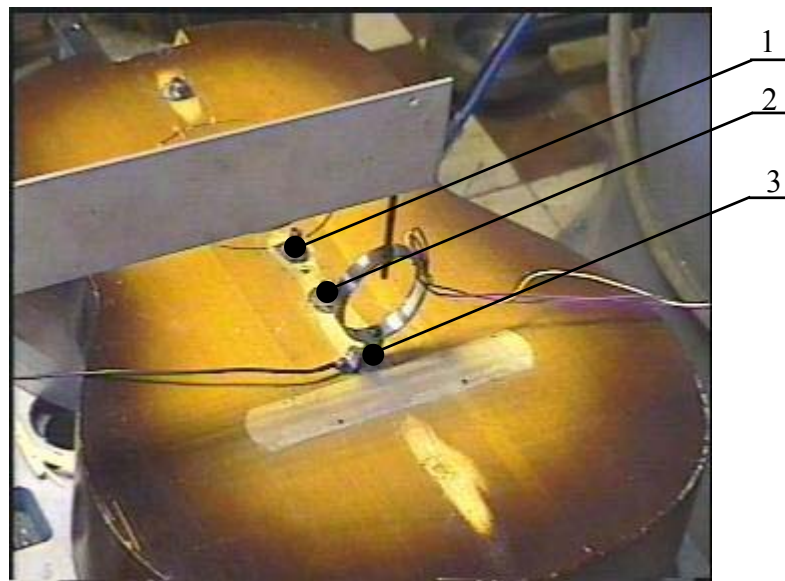


Рис.4.7. Точки возбуждения колебаний

На каждой частоте возбуждения фиксируем амплитуды вынуждающих сил F_0 и амплитуды виброускорений a_0 . Виброускорения измеряем в непосредственной близости от точки возбуждения колебаний. По ним рассчитываем приведенную амплитуду

$$q_0 = \frac{ka_0}{F_0 f^2}, \quad (4.2)$$

где $k = 10^4$ – масштабный множитель, f – частота колебаний в Гц.

Таким образом, с шагом 2–3 Гц исследовался частотный диапазон от 80 до 560 Гц. В области резонансов шаг по частоте уменьшался. Отдельно рассматривалась дека с подкреплениями (рис.3.1) и дека без подкреплений. Результаты измерений в виде АЧХ представлены на рис.4.8 – 4.13 сплошной линией.

Следует иметь в виду, что на качество элементов корпуса МИ существенное влияние оказывает демпфирование. Ввиду многообразия и сложности физических процессов, связанных с рассеянием энергии, достоверная информация о характеристиках демпфирования конструкции, как правило, отсутствует. Приближенные оценки получают главным образом экспериментальным путем.

Известны два основных экспериментальных метода определения констант демпфирования: метод собственных затухающих колебаний [180] и метод вынужденных колебаний (или резонансный метод) [40, 78, 120]. Во втором случае характеристики демпфирования получаются на основе измерений одного из следующих параметров:

- ширины полосы резонансной кривой;
- амплитуды динамических перемещений при резонансе;
- площади петли гистерезиса.

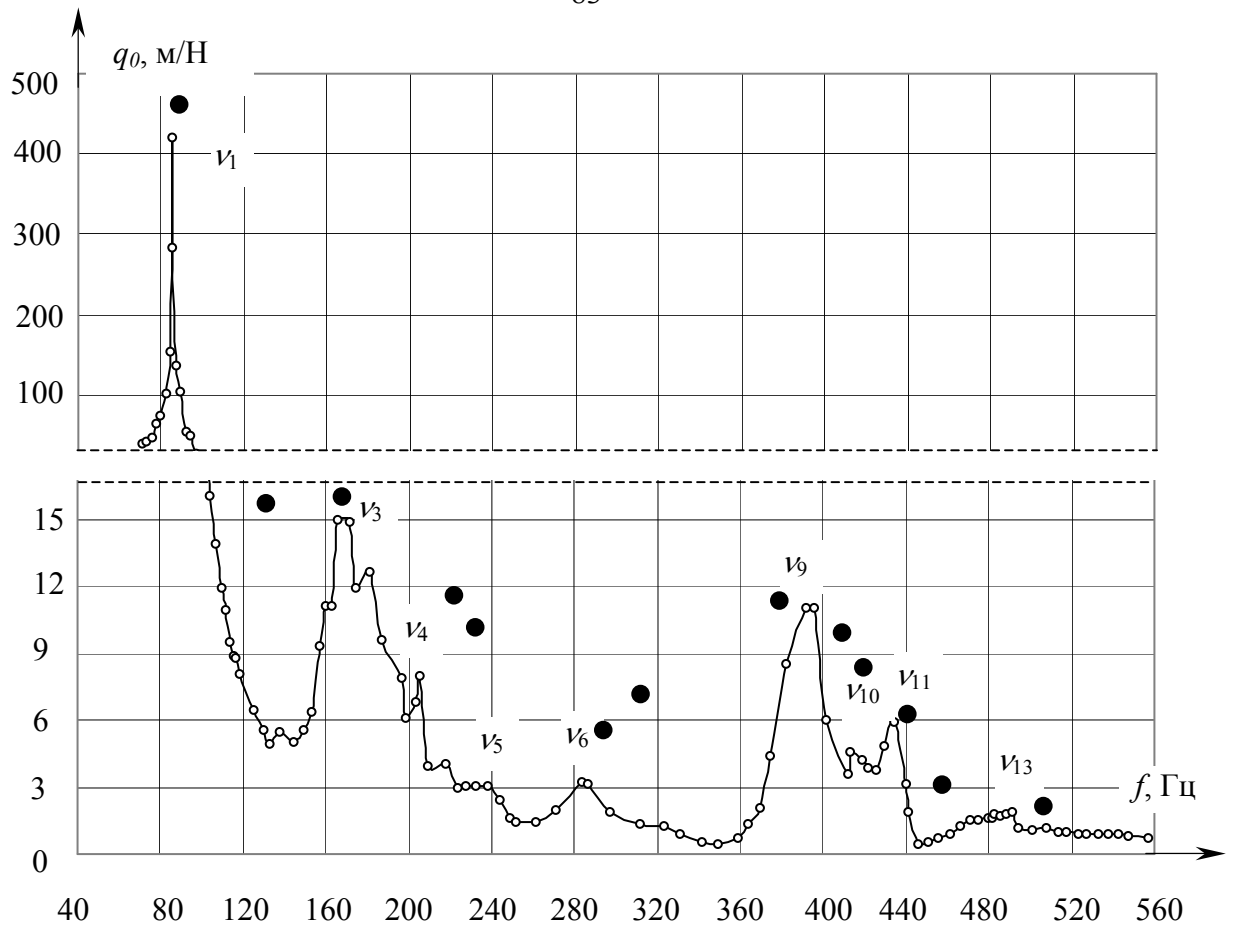


Рис.4.8. АЧХ деки без подкреплений (возбуждение в точке 1)

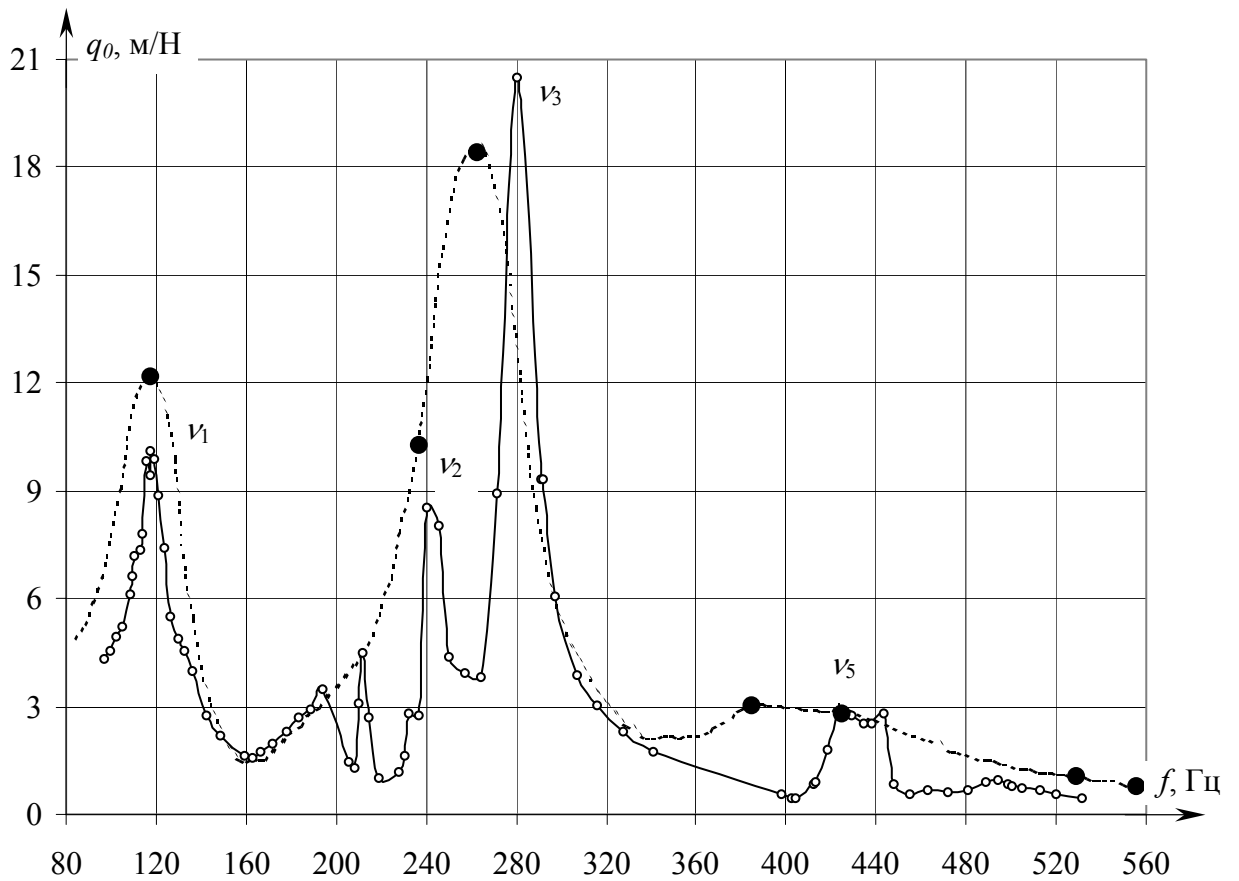


Рис.4.9. АЧХ деки с подкреплениями (возбуждение в точке 1)

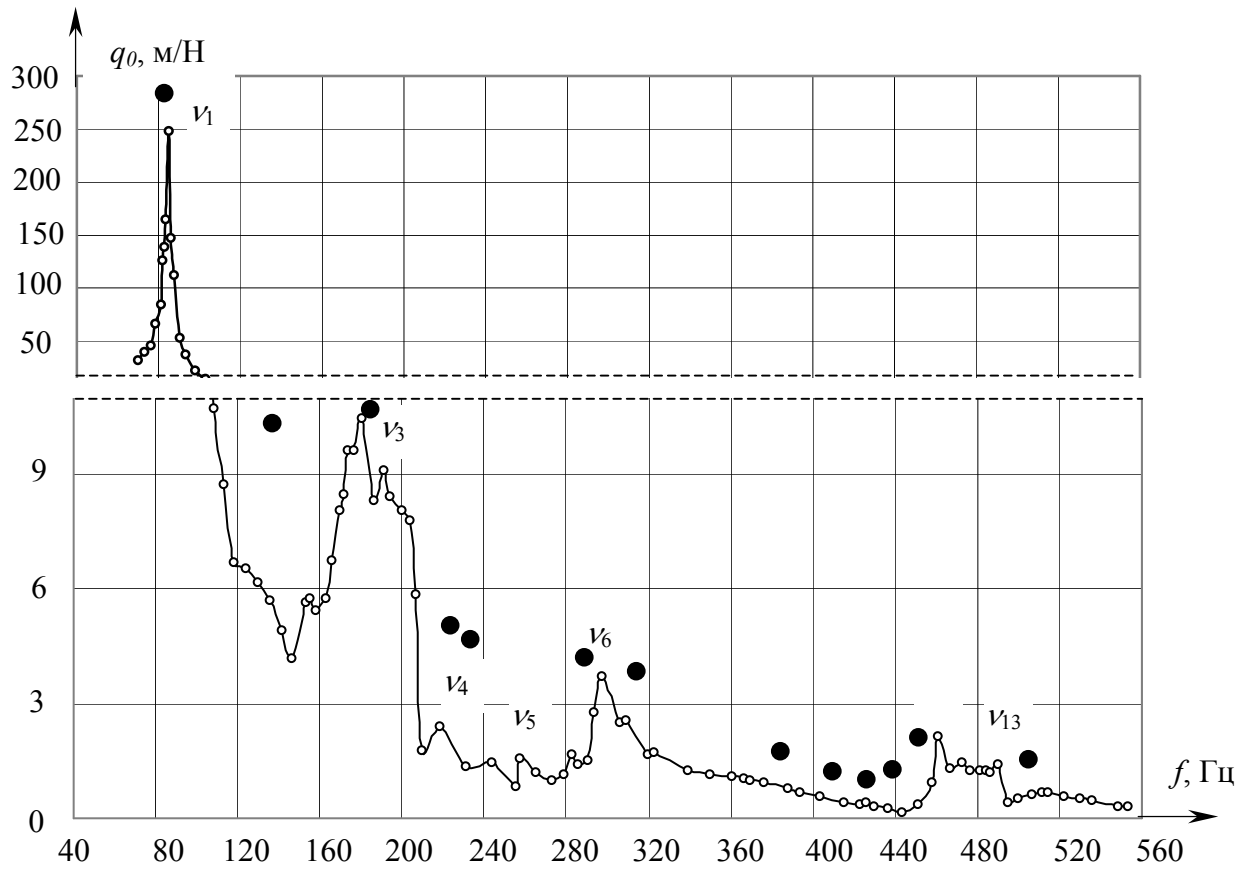


Рис.4.10. АЧХ деки без подкреплений (возбуждение в точке 2)

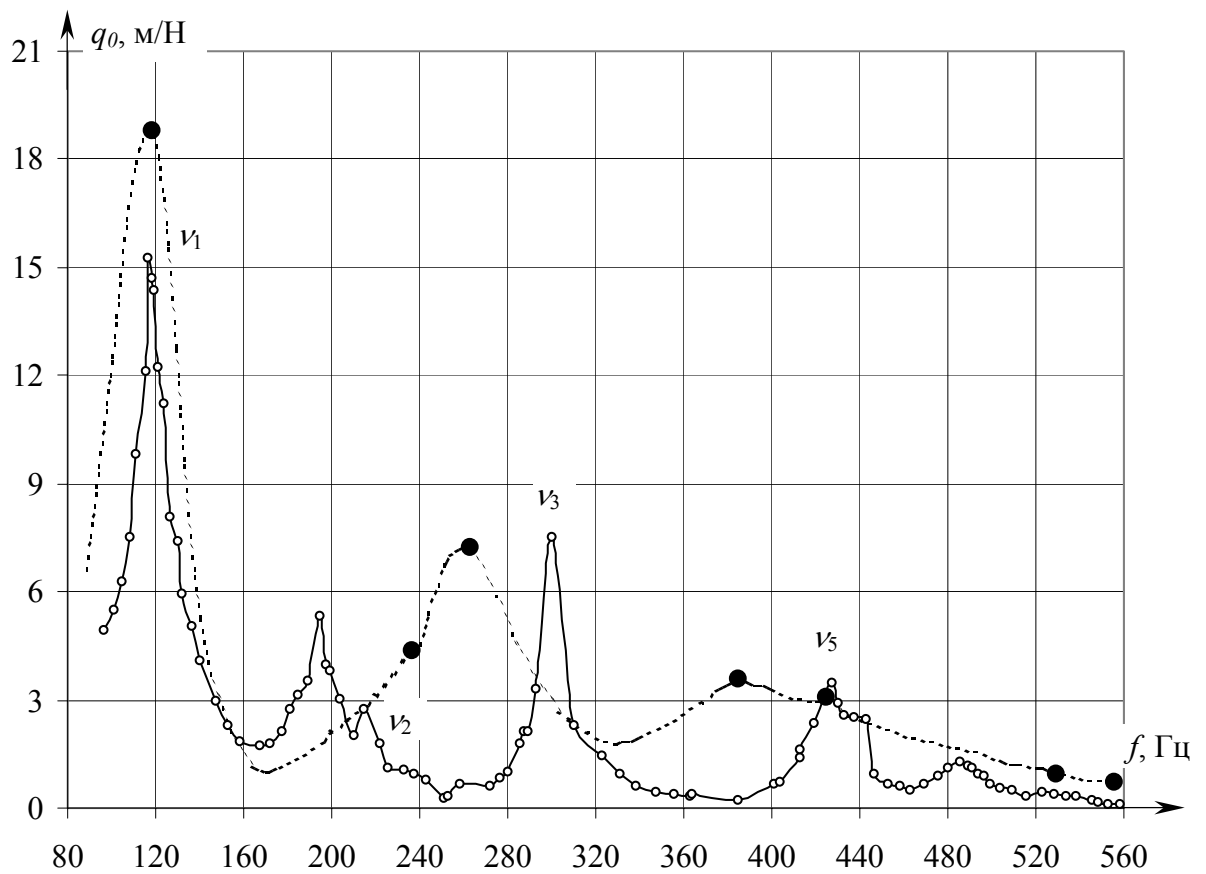


Рис.4.11. АЧХ деки с подкреплениями (возбуждение в точке 2)

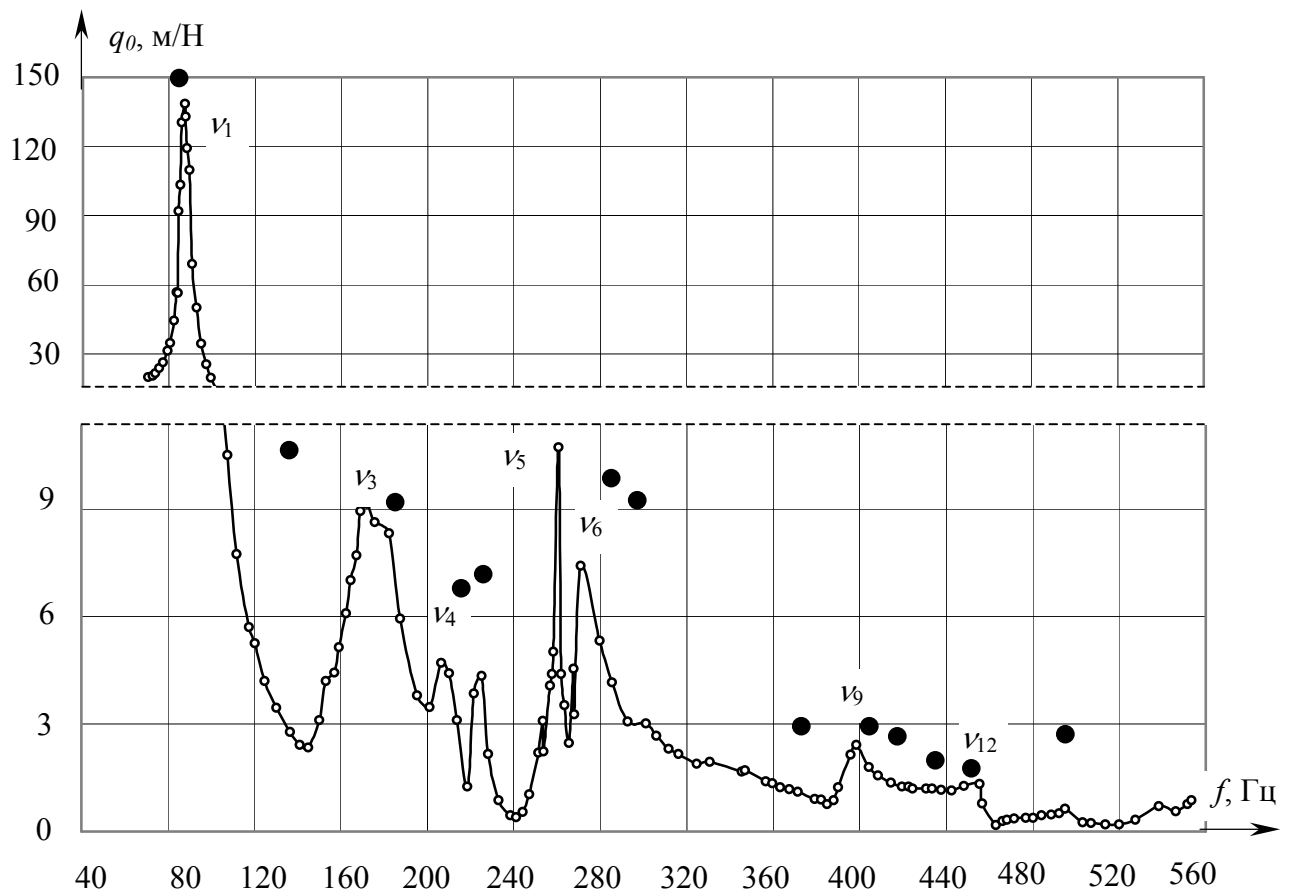


Рис.4.12. АЧХ деки без подкреплений (возбуждение в точке 3)

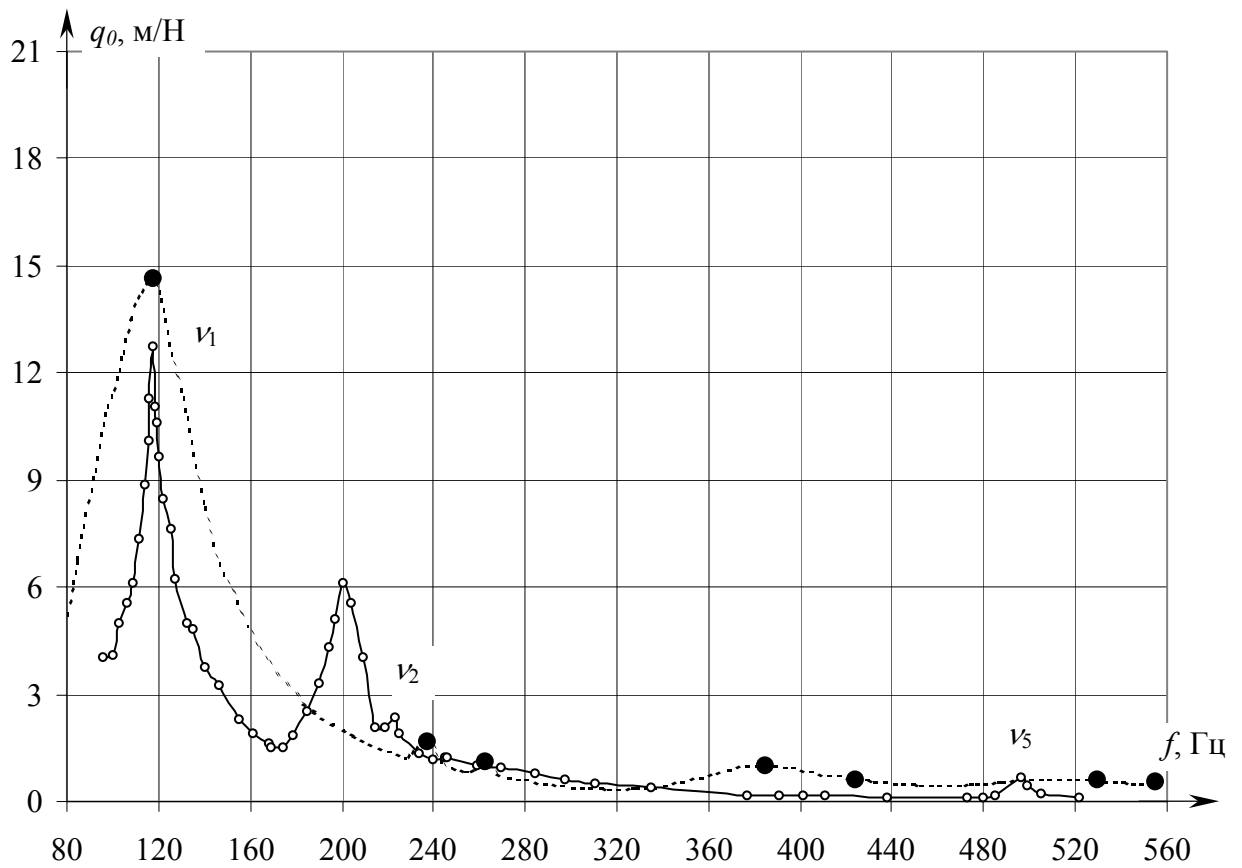


Рис.4.13. АЧХ деки с подкреплениями (возбуждение в точке 3)

Для определения характеристик демпфирования воспользуемся АЧХ на рис.4.8 – 4.13. Демпфирующую способность деки оцениваем интегрально по ширине полосы первого “пика” резонансной кривой (по первому тону колебаний). На рис.4.14 дана схема, поясняющая процедуру обработки АЧХ. Здесь q_0 – резонансная амплитуда колебаний, разность $f_2 - f_1$ – ширина полосы резонансной кривой. Примем $n = \sqrt{2}$. В этом случае $f_2 - f_1$ указывает область частот, для которых энергия вынужденных колебаний составляет 50% энергии колебаний при резонансе.

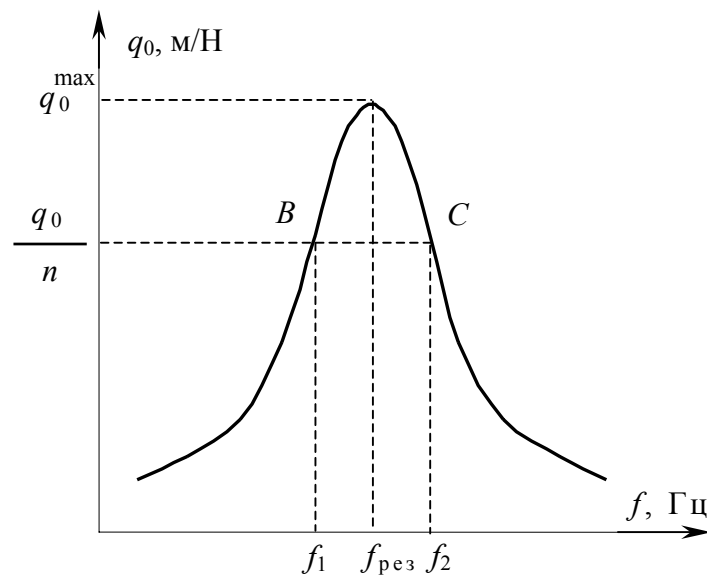


Рис.4.14. Ширина полосы резонансной кривой

Ширина полосы резонансной кривой прямо пропорциональна безразмерному коэффициенту затухания η , который определяется формулой [80]:

$$\eta = \frac{f_2 - f_1}{f_{рез} \sqrt{n^2 - 1}}. \quad (4.3)$$

Величина η обратно пропорциональна добротности колебательной системы. Чем меньше η , тем круче кривая вблизи резонанса. Наоборот, при больших η резонансная кривая становится пологой. В зависимости от безразмерного коэффициента затуха-

ния η находится логарифмический декремент колебаний [66].
При слабом демпфировании

$$\delta = \pi \eta. \quad (4.4)$$

Результаты обработки АЧХ, представленных на рис.4.8, 4.10, 4.12 (для деки без подкреплений) и на рис.4.9, 4.11, 4.13 (для деки с подкреплениями), сведены в табл.6. На основании анализа таблицы констатируем, что усиление деки ребрами жесткости (рис.3.1) существенно, в 2,4 раза увеличивает её демпфирующую способность.

Таблица 6

Конструкция деки	$f_{рез}$, Гц	$f_2 - f_1$, Гц	H	δ
Без подкреплений	86	4	0,05	0,157
С подкреплениями	118	18	0,12	0,377

Полученные результаты (табл.6) неплохо согласуются с данными работ [61, 113], в которых для дек струнных МИ указаны следующие границы изменения логарифмического декремента $\delta = 0,157 \div 0,628$. В свою очередь для бука $\delta = 0,03 \div 0,049$, ели – $\delta = 0,034 \div 0,049$, сосны – $\delta = 0,025$. В целом для деревянных конструкций $\delta = 0,151 \div 0,176$ [111].

4.4 Физико-механические характеристики материалов

С целью идентификации конструкционных материалов и оценки их упругих и инерционных свойств в лаборатории сертификации древесины МарГТУ (руководитель проф. В.И. Федюков) были выполнены специальные эксперименты.

Из элементов корпуса гитары (рис.3.1): верхней деки, подставки для струн и пружинок были вырезаны образцы. Образцы,

предназначенные для определения упругих постоянных, удовлетворяли следующим требованиям:

- Осева́я линия образца ориентирована строго вдоль волокон древесины.
- Продольный размер образца в 20 раз больше характерного поперечного размера.
- Размеры поперечного сечения по длине образца примерно одинаковы.

Вначале определялась плотность. Для этого снимались размеры каждого образца, после чего они взвешивались. Полученные значения плотности приведены в табл.7.

Таблица 7

Элементы конструкции	Порода древесины	ρ , кг/м ³	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	G_{12} , ГПа	G_{13} , ГПа	G_{23} , ГПа	ν_{21}
Дека	Ель	494	15,0	0,335*	0,622*	0,422*	0,043*	0,009*
Подставка для струн	Бук	739	14,6	–	–	0,952*	–	–
Ребра жесткости	Сосна	581	16,6	–	–	1,18*	–	–

Затем определялись модули упругости. Для этого использовался импульсный ультразвуковой метод. При помощи ультразвукового дефектоскопа УК-14П (рис.4.15) измерялась величина τ – время пробега упругой волной полной длины образца l . После чего вычислялась скорость звука

$$c = \frac{l}{\tau}, \quad (4.4)$$

В зависимости от скорости звука и плотности материала по формуле

$$E_l = c^2 \rho \quad (4.5)$$

рассчитывался модуль упругости вдоль волокон древесины. Полученные значения E_1 представлены в табл.7.



Рис.4.15. Импульсный ультразвуковой дефектоскоп УК – 14П

Далее, путем сопоставительного анализа морфологических признаков образцов с эталонами древесины, а также путем сопоставления полученных физико-механических характеристик с известными данными [7], взятыми при 12% влажности, определялись породы древесины. Установлено, что дека изготовлена из ели, подставка для струн – из бука, пружинки – из сосны.

Модуль упругости поперек волокон E_2 ; модули сдвига G_{12} , G_{13} , G_{23} ; коэффициент Пуассона ν_{21} для ели, бука и сосны взяты на основании экспериментальных данных [7]. В табл.7 соответствующие значения упругих постоянных отмечены звездочками.

Заметим, что резонансные свойства древесины характеризуются акустической константой K , формула (1.1). Чем больше величина K , тем лучше считается древесина. В нашем случае $K = 11,2 \text{ м}^4/(\text{кг с})$, что несколько ниже средней величины, характерной для резонансной ели – $K \sim 12 \text{ м}^4/(\text{кг с})$ [130].

4.5. Сопоставительный анализ результатов расчётов и экспериментов

На рис.4.8 – 4.13 представлены АЧХ, построенные на основании экспериментальных и расчетных данных. Данные эксперимента изображены кружками, соединенными сплошными линиями. Результаты расчётов (амплитуды на резонансных частотах) – жирными точками, соединенными штриховыми линиями. Расчет резонансных амплитуд выполнен на основании решения (2.18). Демпфирование описано моделью (2.43). Аналогичные результаты получены на основе экстраполяции (2.46).

Рис.4.8, 4.10, 4.12 соответствуют деке без подкреплений, рис. 4.9, 4.11 и 4.13 – деке с подкреплениями (рис.3.1). Из анализа АЧХ видно, что в случае деки без подкреплений резко выделяются колебания первого тона. Высота первого "пика" на резонансных кривых превышает остальные в 10 – 30 раз.

В случае деки с подкреплениями картина АЧХ заметно изменяется. Основной тон перестает быть доминирующим. Дека с подкреплениями обладает более ровным составом резонансных амплитуд по сравнению с декой без подкреплений.

Известно [59, 61, 105, 106, 113, 114], что идеальные деки должны одинаково резонировать колебания каждой струны. Следовательно, подкрепления (пружинки) способствуют тому, что динамическая реакция деки на внешнее вибрационное возбуждение в рассматриваемом диапазоне частот становится более однородной.

Кривые на рис.4.8 и 4.9 получены путём приложения вибрационной нагрузки в точке 1, на рис.4.10 и 4.11 – в точке 2, на рис.4.12 и 4.13 – в точке 3. Точки 1, 2, 3 расположены между резонаторным отверстием и подставкой для струн.

Из анализа кривых наблюдается следующая особенность. В случае деки без подкреплений: чем ближе точка приложения нагрузки к резонаторному отверстию, тем больше получаются амплитуды колебаний. И это естественно. В случае деки с подкреплениями отмеченная особенность выражена в меньшей степени. Тем не менее, при возбуждении колебаний в точке 3 (ближе к подставке для струн) динамическая реакция деки получается несколько слабее, чем в точках 1 и 2.

Сравнительный анализ АЧХ показывает, что вибрационные нагрузки в точках 1, 2, 3 (рис.4.7) вызывают различную динамическую реакцию. Так, в случае подкрепленной деки при возбуждении колебаний в точке 1 q_0^{max} (рис.4.9) наблюдается на частоте ν_3 (доминирует третий тон). При возбуждении колебаний в точке 3 максимальные амплитуды получаются на частоте ν_1 (рис.4.13). Здесь уже доминирует первый тон. С увеличением частоты возбуждения уменьшаются амплитуды колебаний. Причём, вне зависимости от конструкции деки, с приложением вибрационной нагрузки в точке 3 АЧХ получаются более пологими, чем в точках 1 и 2.

По характерным "пикам" АЧХ на рис.4.8 – 4.13 определяем резонансные частоты. Для деки без подкреплений удаётся выделить до тринадцати, для деки с подкреплениями – до шести низших собственных частот. Результаты обработки эксперимента сведены в табл.8. Прочерки означают отсутствие резонансных "пику" на АЧХ. Здесь же представлены 20 расчетных собственных частот, полученных на основании решения (2.36) для случаев шарнирно-опертой и защемлённой по контуру деки.

Заметим, собственные формы колебаний деки без подкреплений делятся на симметричные и кососимметричные. В табл.8 частоты, соответствующие кососимметричным формам, отмечены

звездочками. Конструкция деки с подкреплениями не является симметричной, поэтому ее собственные формы не обладают свойством симметрии.

Таблица 8

Частота	Собственные частоты, Гц					
	Дека без подкреплений			Дека с подкреплениями		
	Эксперимент	Расчет		Эксперимент	Расчет	
		Шарнир	Заделка		Шарнир	Заделка
ν_1	85 – 87	88	105	116 – 120	118	161
ν_2	—	126*	164*	220 – 240	237	314
ν_3	172 – 182	187	250	280 – 300	262	338
ν_4	205* - 219*	221*	266*	—	385	463
ν_5	225 – 257	225	291	423 – 495	424	525
ν_6	271* - 297*	292*	366*	525	529	617
ν_7	—	310	373	—	555	668
ν_8	—	382	466	—	632	792
ν_9	395* - 399*	402*	493*	—	724	882
ν_{10}	413	416	494	—	816	930
ν_{11}	434*	437*	513*	—	862	966
ν_{12}	455 – 461	453	555	—	897	987
ν_{13}	490* - 495*	501*	608*	—	927	1009
ν_{14}	—	569	658	—	969	1103
ν_{15}	—	588*	683*	—	1020	1129
ν_{16}	—	612	687	—	1087	1203
ν_{17}	—	660	759	—	1198	1343
ν_{18}	—	668*	773*	—	1204	1355
ν_{19}	—	685	796	—	1209	1384
ν_{20}	—	722*	816*	—	1278	1424

Анализ результатов табл.8 показывает, что в случае заземления собственные частоты получаются заметно выше, чем в случае шарнирно-опертой конструкции. Эта особенность более

выражена в области низших частот. То есть спектр собственных частот колебаний деки обладает заметной чувствительностью к граничным условиям на контуре. В целом можно отметить, что расчётная схема шарнирно-опертой деки лучше отвечает эксперименту.

Вместе с тем, отдельные расчётные частоты на 10 – 20% отличаются от эксперимента. Очевидно, эти различия объясняются, с одной стороны, погрешностями расчетной динамической модели, с другой – погрешностями эксперимента, а также технологическими и конструкторскими несовершенствами самой деки, как элемента конструкции МИ.

Сравнительный анализ расчетных и экспериментальных кривых на рис.5.9 – 5.14 выявляет их заметное различие: расчетная кривая более однородна по составу и лишена отдельных пиков. Видимо, это обстоятельство связано с тем, что расчетная динамическая модель деки не учитывает влияния акустической внутренней полости, которая имеет собственную жёсткость и обладает собственным набором резонансных частот.

На основании эксперимента получена совокупная АЧХ деки с резонатором. Эта кривая, очевидно, содержит пики, обусловленные как резонансами самой деки, так и резонансами акустической внутренней полости. Если собственные частоты деки и акустической внутренней полости не совпадают друг с другом, то резонатор повышает жёсткость упругой системы и уменьшает амплитуды колебаний деки и, напротив, увеличивает их там, где собственные частоты близки. При этом экспериментальные значения собственных частот деки, как связанной упруго-акустической системы, мало отличаются от расчётных частот деки, как парциальной динамической системы.

4.6. Цифровой спектральный анализ

С целью оценки влияния акустической внутренней полости и струн на динамические характеристики деки на основе цифрового спектрального анализа был поставлен и проведен ряд дополнительных экспериментов.

Эксперименты проводились в лаборатории кафедры Сопротивления материалов и прикладной механики МарГТУ при помощи специального прибора “Навигатор” на базе ПК Cassiopeia EG-800. Прибор сконструирован в МарГТУ, как мобильное устройство для измерений динамических параметров. Разработанное программное обеспечение ограничивалось анализом установившихся режимов колебаний.

Для регистрации виброускорений применялся пьезоэлектрический датчик AP-98-100. Датчик закреплялся на поверхности деки последовательно в точках 1, 2, 3 (рис.4.7) при помощи специального штифта. Колебания возбуждались щипком басовой или дискантовой струн. Результатом измерений стал набор дискретно-временных последовательностей виброускорений: $a = f[n]$ (рис.4.16). В моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ фиксировались N дискретных значений виброускорений.

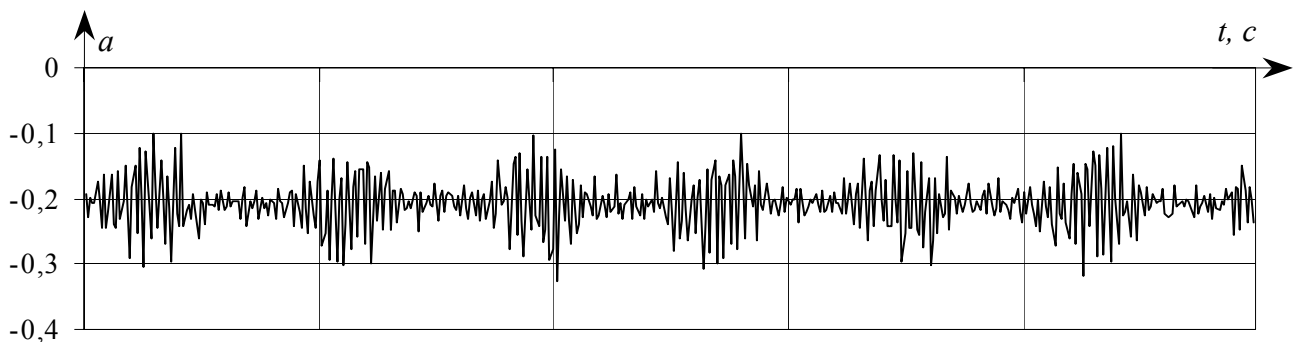


Рис.4.16. Форма сигнала

Период дискретизации $h = \frac{T}{N} = 125$ мкс, где T – основной период колебаний. Частота $f_h = \frac{1}{h} = 8$ кГц – это частота среза, или частота Котельникова-Найквиста. Как правило, максимальная ожидаемая частота в 1,5-2 раза получается меньше, т.е. $f_{max} = 4-5,3$ кГц.

Зависимость $a = f[n] = f(nh)$ дважды интегрировалась. Полученная дискретная амплитудно-временная последовательность $w[n]$ подвергалась численным преобразованиям Фурье:

$$W[f] = h \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \exp\left(\frac{-i2\pi f n}{N}\right), \quad (4.6)$$

$$w[n] = w(nh).$$

Здесь $w[n]$, $(n = 0, 1, \dots, N-1)$ – дискретный сигнал, $i = \sqrt{-1}$. При этом использовалась программа MathCAD 2000. Затем определялась спектральная плотность мощности (СПМ) [74]:

$$P(f) = \frac{h}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \exp\left(\frac{-i2\pi f n}{N}\right) \right|^2. \quad (4.7)$$

Известно, что выборочный спектр даёт статистически несостоятельные оценки СПМ. Как правило, имеют место ложные пики, положение которых изменяется в зависимости от координаты начала отсчета времени. В этой связи использовался один из наиболее эффективных методов сглаживания – метод Уэлча [74].

Данные $w[n]$ разбивались на K сегментов по D отсчетов в каждом со сдвигом S между соседними сегментами ($S \leq D$). Максимальное число сегментов K определялось целой частью числа $K = (N-D)/S + 1$. Каждый сегмент “взвешивался” посредством окна Наттолла. Усреднение по периодограммам сегментов давало окончательную оценку СПМ:

$$P(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} P^i(f). \quad (4.8)$$

Для графического представления результатов использовалась логарифмическая шкала. По оси ординат откладывалась разность уровней СПМ в дБ:

$$\tilde{P}(f) = 10Lg\left(\frac{P(f)}{\max(P(f))}\right). \quad (4.9)$$

4.6.1. Влияние акустического резонатора

Эксперименты выполнялись на гитаре с декой, изготовленной из трехслойной фанеры. С внутренней стороны дека имела три поперечно расположенных пружинки. Корпус гитары устанавливался горизонтально на массивный испытательный стол. Затем, посредством прибора снимались значения виброускорений $a = f[n]$. В каждой точке деки производилось до пяти повторных измерений.

Далее, из корпуса гитары вырезалось дно таким образом, чтобы это минимально отразилось на условиях закрепления деки. После чего корпус гитары вновь устанавливался в горизонтальное положение так, чтобы обеспечить свободную циркуляцию воздуха над и под декой. Таким образом, исключалось влияние акустической внутренней полости.

На рис.4.17 представлены спектральные кривые деки с резонатором, на рис.4.18 – деки без резонатора. По характерным пикам определялись десять низших собственных частот. Результаты экспериментов сведены в табл.9. Здесь же приведены расчётные данные.

Из сопоставительного анализа результатов следует:

- Спектральная кривая деки с резонатором содержит дополнительные пики – акустические резонансы на частотах 150-170 Гц, 350-380 Гц, 650-680 Гц. Пики имеют ярко выраженный характер.

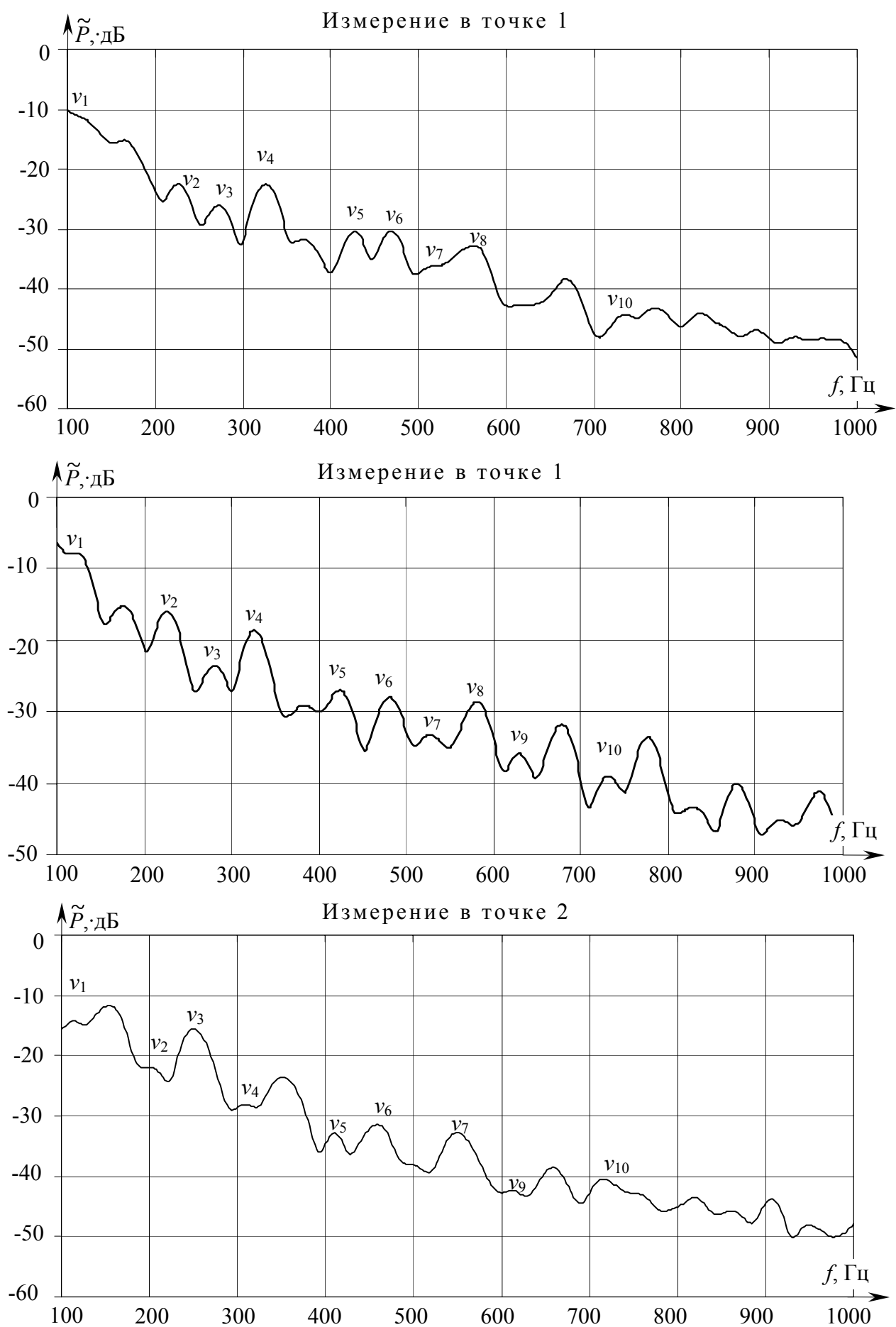


Рис. 4.17. Спектральные кривые деки с резонатором

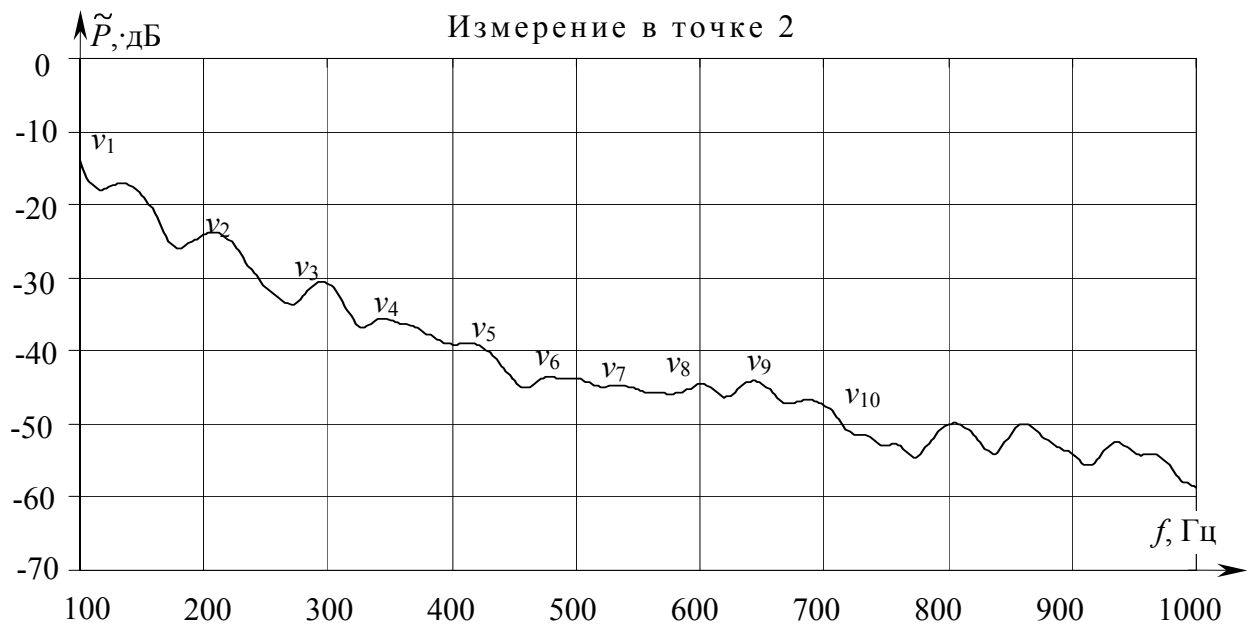
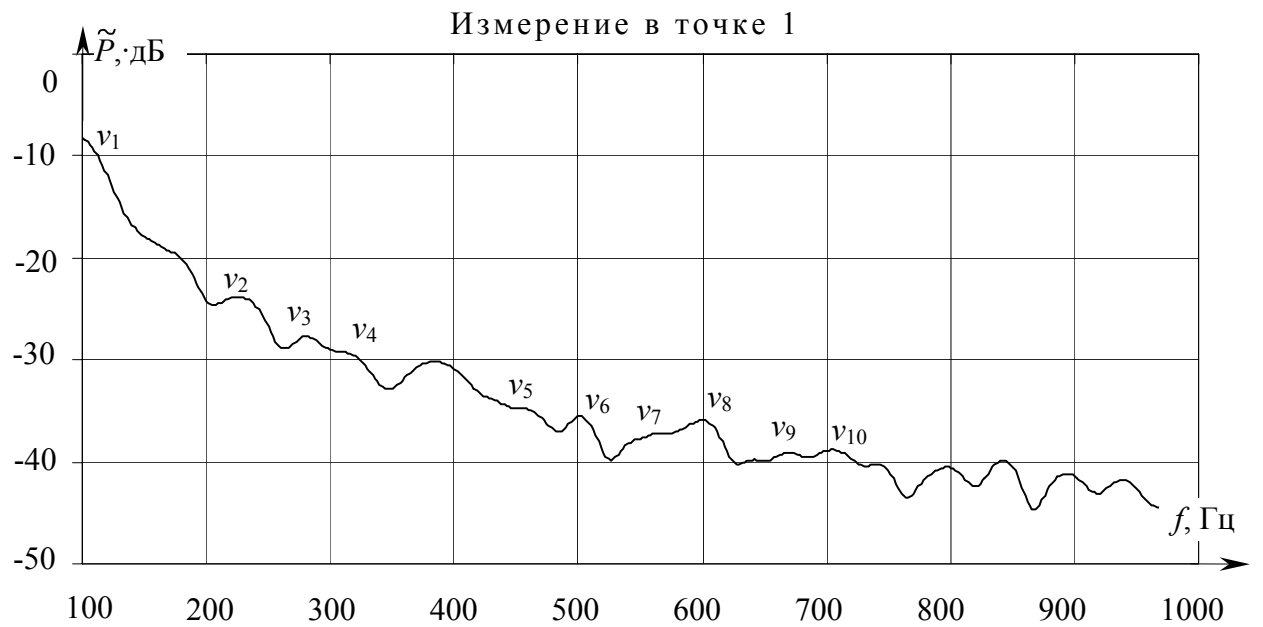
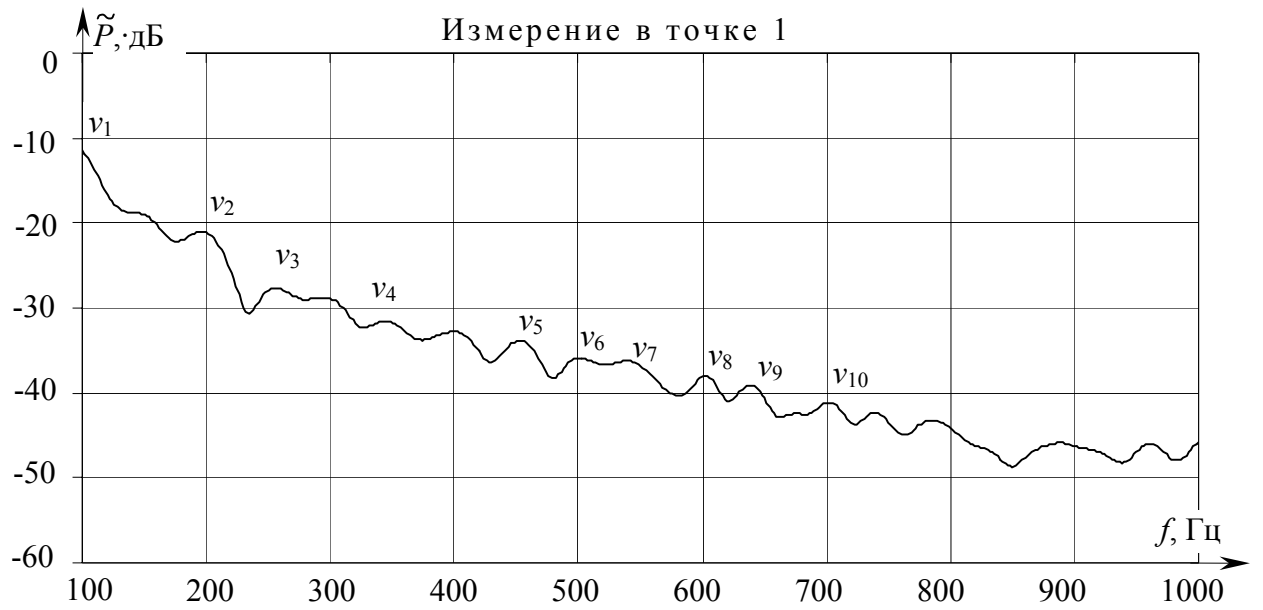


Рис. 4.18. Спектральные кривые деки без резонатора

Таблица 9

Собственные частоты, Гц	Эксперимент		Расчет
	Дека с резонатором	Дека без резонатора	
ν_1	120 – 136	110 – 120	112
ν_2	210 – 230	200 – 215	210
ν_3	260 – 280	260 – 280	271
ν_4	320 – 335	340 – 355	375
ν_5	415 – 435	430 – 460	454
ν_6	455 – 480	485 – 500	500
ν_7	525 – 535	510 – 540	512
ν_8	580 – 595	600 – 610	611
ν_9	620 – 630	615 – 625	615
ν_{10}	720 – 740	710 – 720	743

- Собственные частоты деки с резонатором и деки без резонатора мало отличаются друг от друга.
- Собственные частоты, установленные экспериментально, в целом неплохо согласуется с расчетом.
- Спектральная кривая деки без резонатора получается более ровной по составу амплитуд, чем деки с резонатором. Очевидно, резонатор усиливает амплитуды колебаний деки на резонансных частотах.

4.6.2. Влияние струн

Корпус гитары устанавливался горизонтально на испытательном столе. Вибрации возбуждались посредством оттягивания басовой струны. Обеспечивалась повторяемость эксперимента: амплитуды, точки приложения нагрузки, плоскости колебаний басовой струны при проведении каждого опыта были одинаковыми.

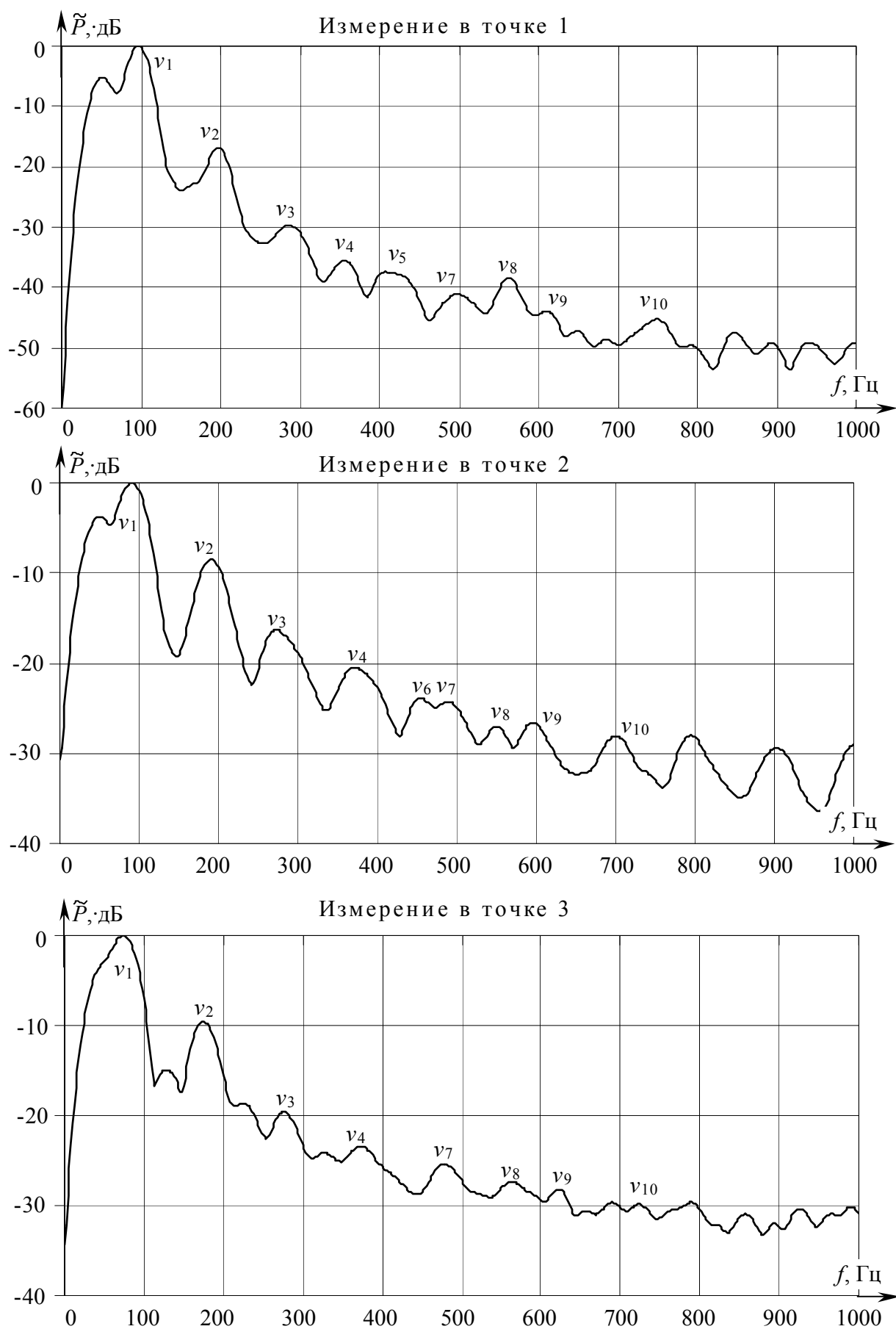


Рис.4.19. Спектральная кривая деки со струнами

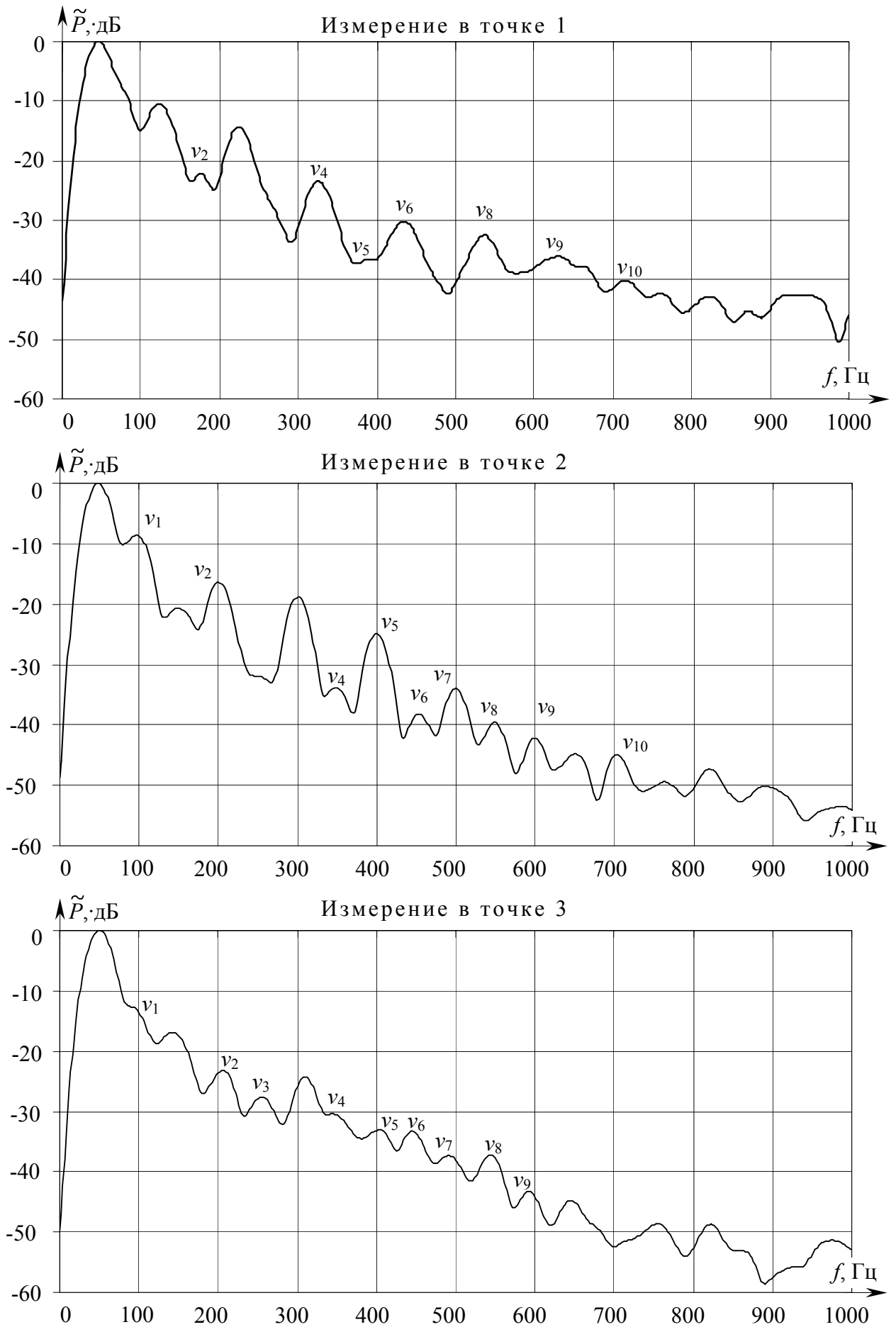


Рис.4.20. Спектральная кривая деки без струн

Спектральные кривые деки со струнами представлены на рис.4.19, деки без струн – на рис.4.20. Следует иметь в виду, что поведение деки без струн исследовалось путём возбуждения колебаний той же басовой струны. Остальные струны при этом были сняты.

По характерным пикам спектральных кривых определялись десять низших собственных частот. Результаты экспериментов сведены в табл.10. Здесь же приведены расчётные данные.

Таблица 10

Собственные частоты, Гц	Эксперимент		Расчёт	
	Дека со струнами	Дека без струн	С учетом начального НДС	Без учета начального НДС
ν_1	95 – 105	85 – 105	107	104
ν_2	190 – 200	185 – 200	192	191*
ν_3	280 – 290	275 – 290	259	260
ν_4	360 – 375	360 – 380	378	378
ν_5	415 – 430	400 – 420	419	417*
ν_6	460 – 465	460 – 475	467	466*
ν_7	485 – 500	500 – 505	492	493
ν_8	555 – 565	545 – 560	563	566*
ν_9	610 – 615	605 – 620	593	591
ν_{10}	695 – 715	705 – 720	726	726*

Анализ экспериментальных данных показывает, что наличие струн оказывает слабое влияние на собственные частоты колебаний деки. Результаты эксперимента подтверждаются расчётными данными.

Выводы по главе 4

1. Проведено экспериментальное исследование механических колебаний гитарной деки. С этой целью спроектирована и изготовлена специальная установка. Разработаны методики измерений собственных частот и форм, констант демпфирования, амплитуд вынужденных колебаний.

2. При помощи методики Хладни исследованы низшие собственные формы. Показано, что усиление деки рёбрами жесткости видоизменяет низшую собственную форму колебаний. Результаты эксперимента качественно подтверждаются альтернативными экспериментальным и численным методами.

3. Выполнены эксперименты, с помощью которых определены физико-механические характеристики конструкционных материалов и установлены породы древесины.

4. Рассмотрены вынужденные колебания гитарной деки и построены АЧХ. В результате расчётно-экспериментальных исследований установлены следующие закономерности:

- Динамическая реакция деки на моногармоническое силовое возбуждение зависит от точки приложения вибрационной нагрузки. Чем дальше нагрузка от резонаторного отверстия, тем меньше амплитуды колебаний, тем более пологой получается АЧХ.

- Подкрепление деки рёбрами жесткости приводит к заметному уменьшению амплитуды колебаний основного тона. Дека с подкреплениями обладает более ровным составом резонансных амплитуд, чем дека без подкреплений.

- Заметное влияние на спектр собственных частот оказывают граничные условия на контуре. Схема шарнирно-опёртой деки лучше отвечает эксперименту, чем заделка.

5. Выполнена интегральная оценка диссипативных свойств конструкции деки и определены константы демпфирования. Ус-

тановлено, что усиление деки рёбрами жесткости в 2,4 раза увеличивает ее демпфирующую способность. Полученные результаты неплохо согласуются с известными данными.

6. Результаты экспериментов сопоставлены с данными расчётов МКЭ. Расчётные данные – резонансные частоты в целом удовлетворительно согласуются с экспериментом. Вместе с тем, выявлено заметное различие расчетных и экспериментальных резонансных кривых.

7. На основе цифрового спектрального анализа установлено заметное влияние на АЧХ акустической внутренней полости (резонатора). Акустический резонатор заметно усиливает амплитуды колебаний деки на резонансных частотах и одновременно ослабляет их за пределами резонансов.

8. Спектральная кривая деки с резонатором содержит дополнительные пики – акустические резонансы на частотах 150–170 Гц, 350-380 Гц, 650-680 Гц.

9. Струны не оказывают заметного влияния на спектр собственных колебаний деки.

5. Характеристики гитарной деки в зависимости от конструктивных факторов

В пятой главе приведены результаты расчётных исследований напряжённого состояния в зависимости от натяжения струн колками и спектра собственных форм и частот в зависимости от конструктивных факторов. Собственные частоты деки сопоставлены с частотами собственных колебаний струн.

5.1. Исследование напряжённого состояния

Исследуем напряженное состояние деки, индуцированное натяжением струн: $F_1 = 71$ Н, $F_2 = 72$ Н, $F_3 = 125$ Н, $F_4 = 105$ Н, $F_5 = 100$ Н, $F_6 = 105$ Н, $F_7 = 101$ Н. Нижний индекс обозначает порядковый номер струны. Номера присваиваются в порядке возрастания – от тонкой (дискантовой) к толстой (басовой) струне. Используем решение (2.19). Расчетная модель реализует шарнирно-неподвижное крепление пластинки по линии контура. Рассмотрим три варианта конструкций подкрепления деки (рис.3.2).

На рис.5.1 изображены картины распределений мембранных усилий, где N_1 и N_2 – нормальные усилия. Серым цветом отмечены области растяжения, белым – области сжатия пластинки. Цветные полосы характеризуют интенсивность внутренних усилий. Каждому уровню соответствует определённый цвет. Анализ показывает, что мембранные усилия в продольном направлении N_1 получаются значительно больше, чем в поперечном направлении N_2 . Нижняя часть пластинки (часть ниже подставки для струн) оказывается растянутой, верхняя часть – сжатой (N_1).

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

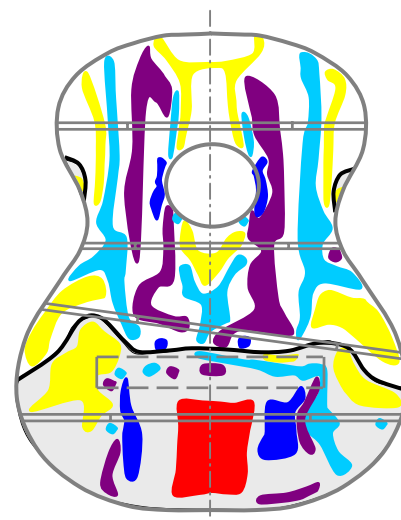
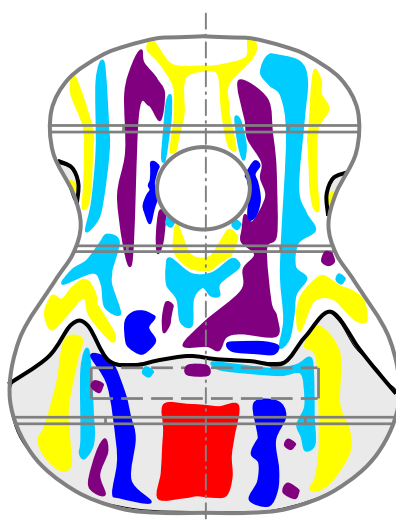
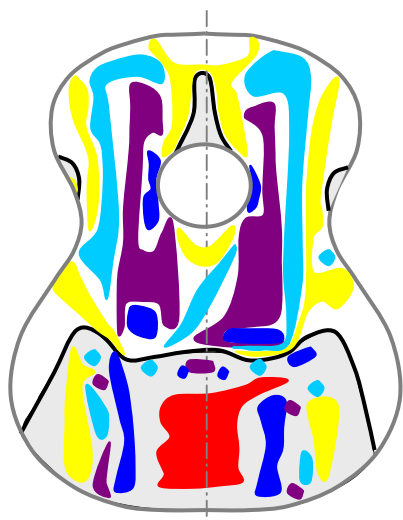
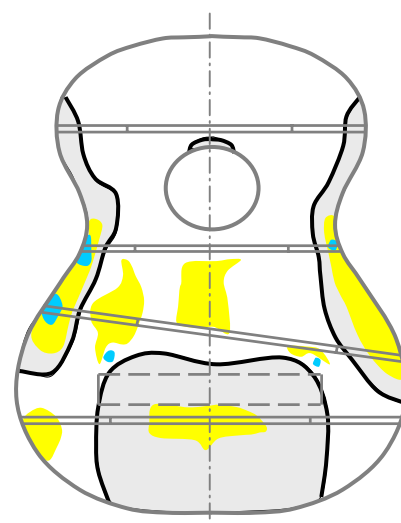
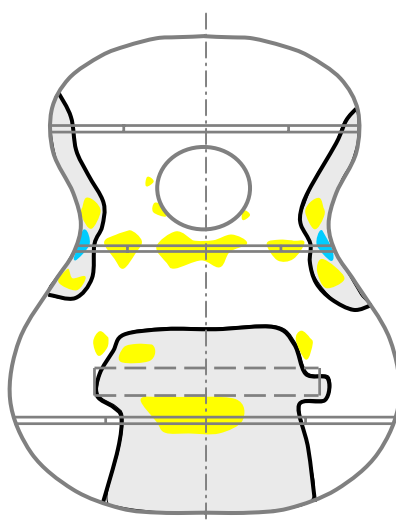
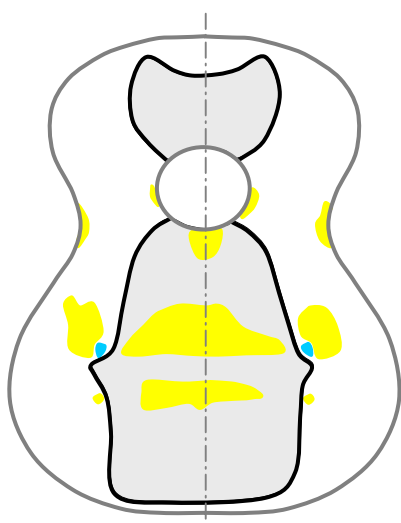





 $N_1, \text{кН/м}$  $N_2, \text{кН/м}$ 

 $0,1 \div 0,3$

 $0,4 \div 0,6$

 $0,9 \div 1,1$

 $1,5 \div 2,5$

 $3,5 \div 4,5$

Рис.5.1. Распределение мембранных усилий в зависимости от схемы подкрепления

Сопоставительный анализ результатов показывает, что подкрепления вносят заметные изменения в картину напряженного состояния, особенно в распределение усилий N_2 .

5.2. Параметрический анализ спектра собственных колебаний

Проанализируем зависимость собственных форм и частот от геометрических размеров и конструктивных факторов. Анализ ограничиваем 10 низшими формами колебаний.

Для расчётов используем динамическую модель МКЭ, систему однородных дифференциальных уравнений (2.36), систему алгебраических уравнений (2.19) и метод итераций в подпространстве собственных векторов [11]. Расчёты выполняем на ПЭВМ с процессором AMD Athlon с тактовой частотой 900 МГц. Время машинного счета составляет около 3 мин.

5.2.1. Влияние схемы подкрепления

Рассмотрим три варианта (схемы) подкрепления гитарной деки (рис.3.2). В табл.11 для каждого варианта приведены расчётные собственные частоты. Звездочкой отмечены частоты, соответствующие кососимметричным формам колебаний. Анализ таблицы показывает, что подкрепления оказывают существенное влияние на спектр собственных частот. Если первые (основные) частоты для вариантов 2 и 3 отличаются от варианта 1 на 18% и 34%, то шестые – уже на 60% и 80%, десятые – на 75% и 96% соответственно.

Таким образом, подкрепление деки односторонним набором рёбер жёсткости увеличивает её собственные частоты. Наиболее

сильное влияние рёбра жёсткости оказывают на высшие частоты колебаний.

На рис.5.2 и рис.5.3 изображены 10 низших собственных форм колебаний. Показаны линии уровня. Построения выполнены в едином масштабе (использовался одинаковый шаг). Знаками плюс и минус отмечены области с противоположными фазами колебаний.

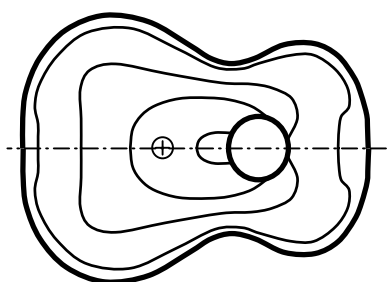
Сопоставительный анализ результатов показывает, что формы собственных колебаний зависят от схемы подкрепления. Чем выше порядковый номер собственной формы, тем сильнее проявляется эта зависимость.

Отметим, что низшие расчётные формы колебаний совпадают с фигурами Хладни на рис.4.5 и 4.6.

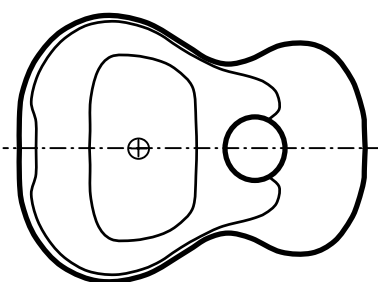
Таблица 11

Частота колебаний	Собственные частоты, Гц		
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
ν_1	88	104	118
ν_2	126*	191*	237
ν_3	187	260	262
ν_4	221*	378	385
ν_5	225	417*	424
ν_6	292*	466*	529
ν_7	310	493	555
ν_8	382	566*	632
ν_9	402*	591	724
ν_{10}	416	726*	816

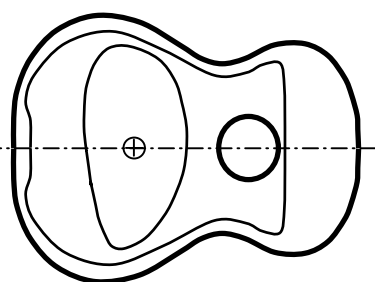
Вариант 1



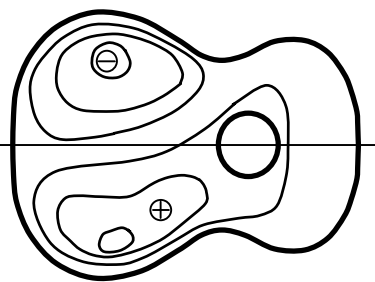
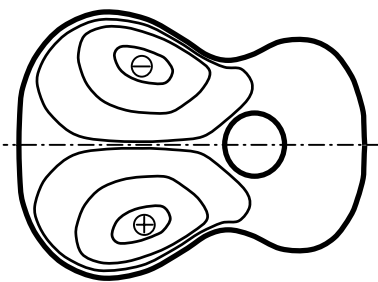
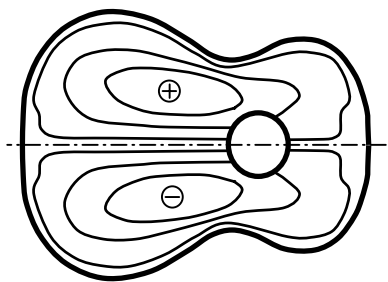
Вариант 2



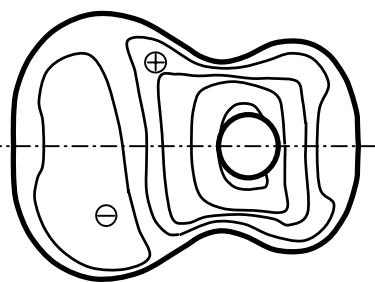
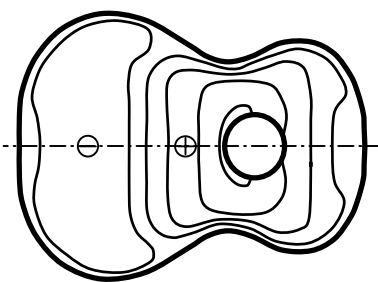
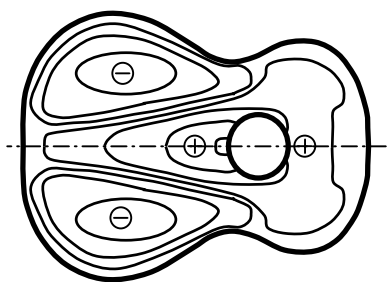
Вариант 3



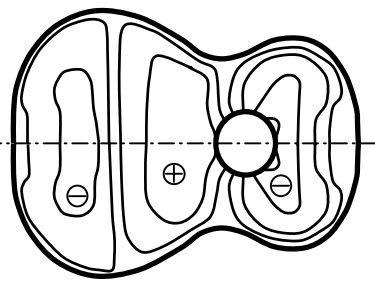
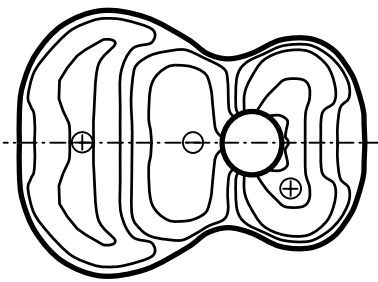
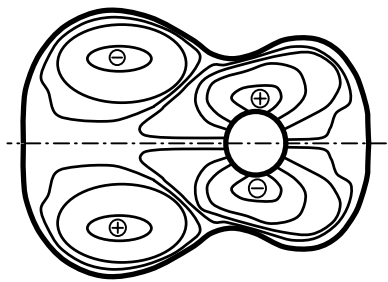
1 Форма



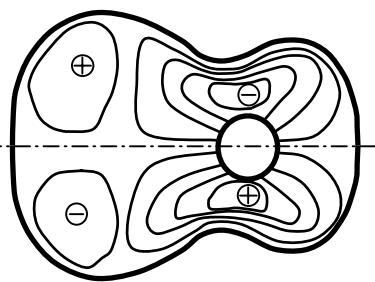
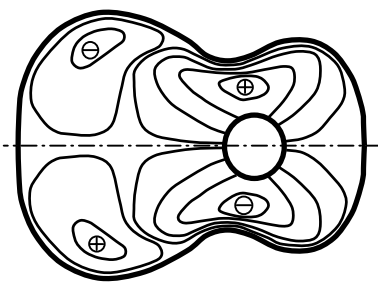
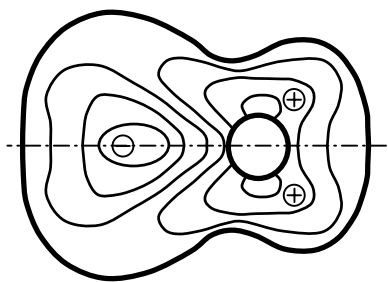
2 Форма



3 Форма



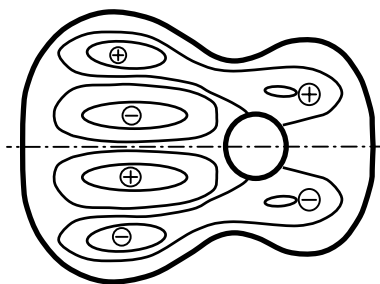
4 Форма



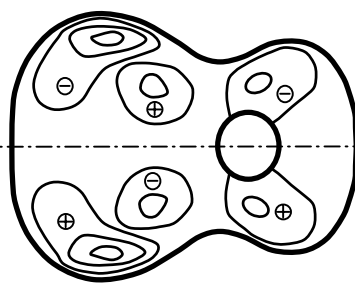
5 Форма

Рис.5.2. Собственные формы в зависимости от схемы подкрепления

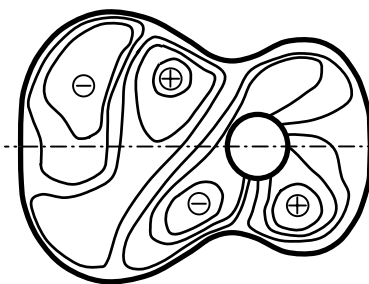
Вариант 1



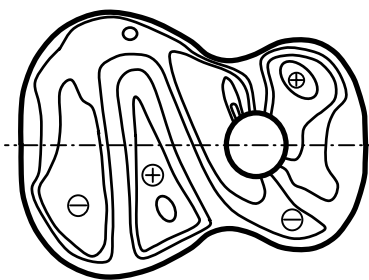
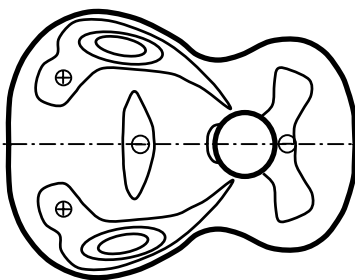
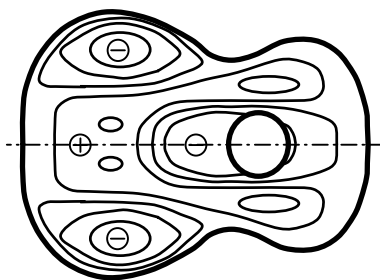
Вариант 2



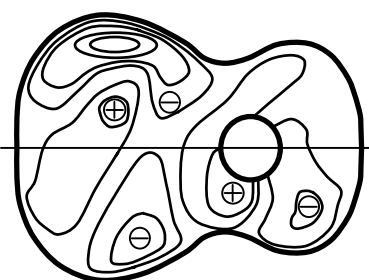
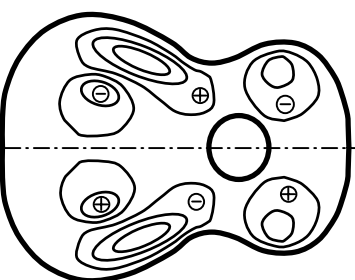
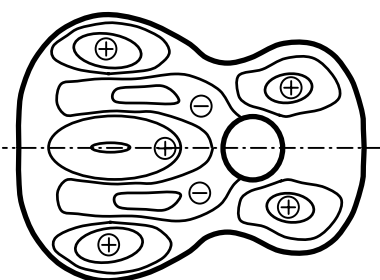
Вариант 3



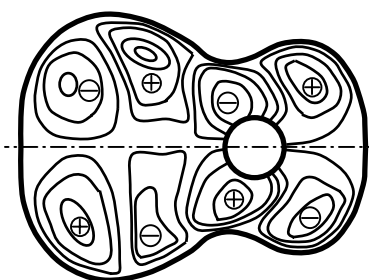
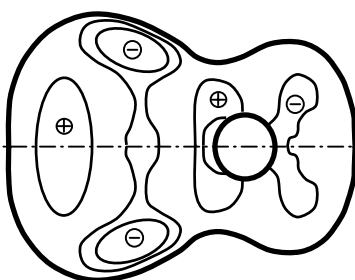
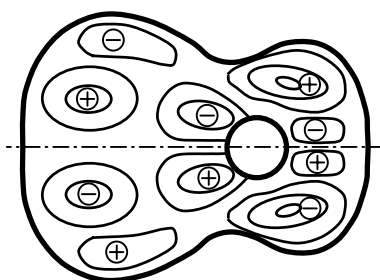
6 Форма



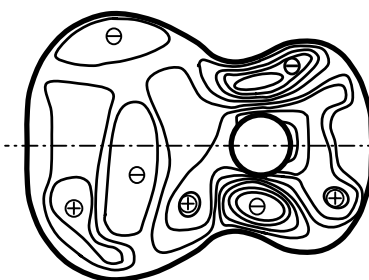
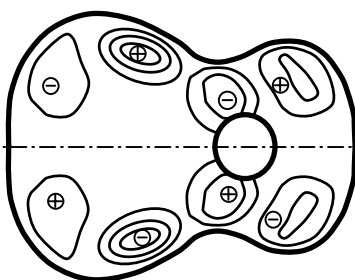
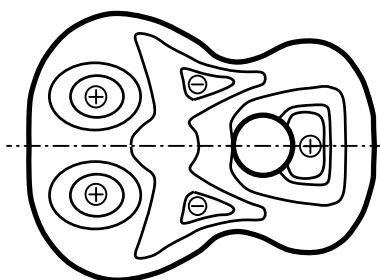
7 Форма



8 Форма



9 Форма



10 Форма

Рис.5.3. Собственные формы в зависимости от схемы подкрепления

5.2.2. Влияние начального напряженного состояния

В табл.12, 13 и 14 для трех вариантов подкрепления деки (рис.3.2) представлены 10 низших собственных частот, рассчитанных с учетом и без учета начального НДС. Начальное НДС рассчитывалось на основании решения (1.19).

Анализ таблиц показывает, что небольшое различие, в пределах 3 – 6%, имеет место лишь для низших частот. Высшие частоты практически не отличаются друг от друга.

Таким образом, если для струны сила натяжения выступает основным параметром жёсткости, который оказывает решающее влияние на её собственные частоты, то для деки это влияние оказывается достаточно слабым. Поэтому при расчёте динамических параметров резонансных дек начальным НДС, индуцированным предварительным натяжением струн, можно пренебречь.

Таблица 12

Частота колебаний	Собственные частоты, Гц			
	Толщина пластинки $h = 2,5$ мм		Толщина пластинки $h = 3$ мм	
	Без учета начального НДС	С учетом начального НДС	Без учета начального НДС	С учетом начального НДС
ν_1	76	81	88	93
ν_2	107*	109	126*	128
ν_3	158	161	187	189
ν_4	188*	187	221*	221
ν_5	192	191	225	224
ν_6	249*	249	292*	293
ν_7	264	267	310	312
ν_8	324	324	382	381
ν_9	343*	340	402*	401
ν_{10}	357	356	416	416

Таблица 13

Частота колебаний	Собственные частоты, Гц			
	Толщина пластинки $h = 2,5$ мм		Толщина пластинки $h = 3$ мм	
	Без учета начального НДС	С учетом начального НДС	Без учета начального НДС	С учетом начального НДС
ν_1	87	90	104	107
ν_2	160*	160	191*	192
ν_3	230	230	260	259
ν_4	322	321	378	378
ν_5	371*	373	417*	419
ν_6	398*	397	466*	467
ν_7	417	417	493	492
ν_8	487*	483	566*	563
ν_9	510	512	591	593
ν_{10}	627*	626	726*	726

Таблица 14

Частота колебаний	Собственные частоты, Гц			
	Толщина пластинки $h = 2,5$ мм		Толщина пластинки $h = 3$ мм	
	Без учета начального НДС	С учетом начального НДС	Без учета начального НДС	С учетом начального НДС
ν_1	99	103	118	120
ν_2	202	205	237	239
ν_3	232	232	262	262
ν_4	329	328	385	384
ν_5	380	379	424	424
ν_6	453	457	529	531
ν_7	478	479	555	557
ν_8	561	562	632	633
ν_9	633	631	724	724
ν_{10}	731	731	816	817

5.2.3. Влияние геометрических размеров

Известно, что акустическая настройка МИ осуществляется путём изменения толщины пластинки или/и путём изменения высоты пружинок. Рассмотрим, какое влияние оказывают геометрические размеры пластинки и пружинок на спектр собственных частот колебаний деки.

В табл.12, 13 и 14 представлены 10 низших собственных частот для трех вариантов подкрепления деки (рис.3.2). Частоты рассчитаны при толщине стенки $h = 2,5$ мм и $h = 3$ мм. Анализ таблиц показывает, что, независимо от схемы подкрепления, увеличение толщины пластинки на 0,5 мм обуславливает повышение собственных частот на 10...20%. Причём, отмеченная особенность касается всех частот спектра колебаний.

На рис.5.4 построены зависимости пяти низших собственных частот от высоты пружинок H (рис.3.1). Высота H варьировалась в пределах от 10 до 14 мм. Рассматривалась дека 3.

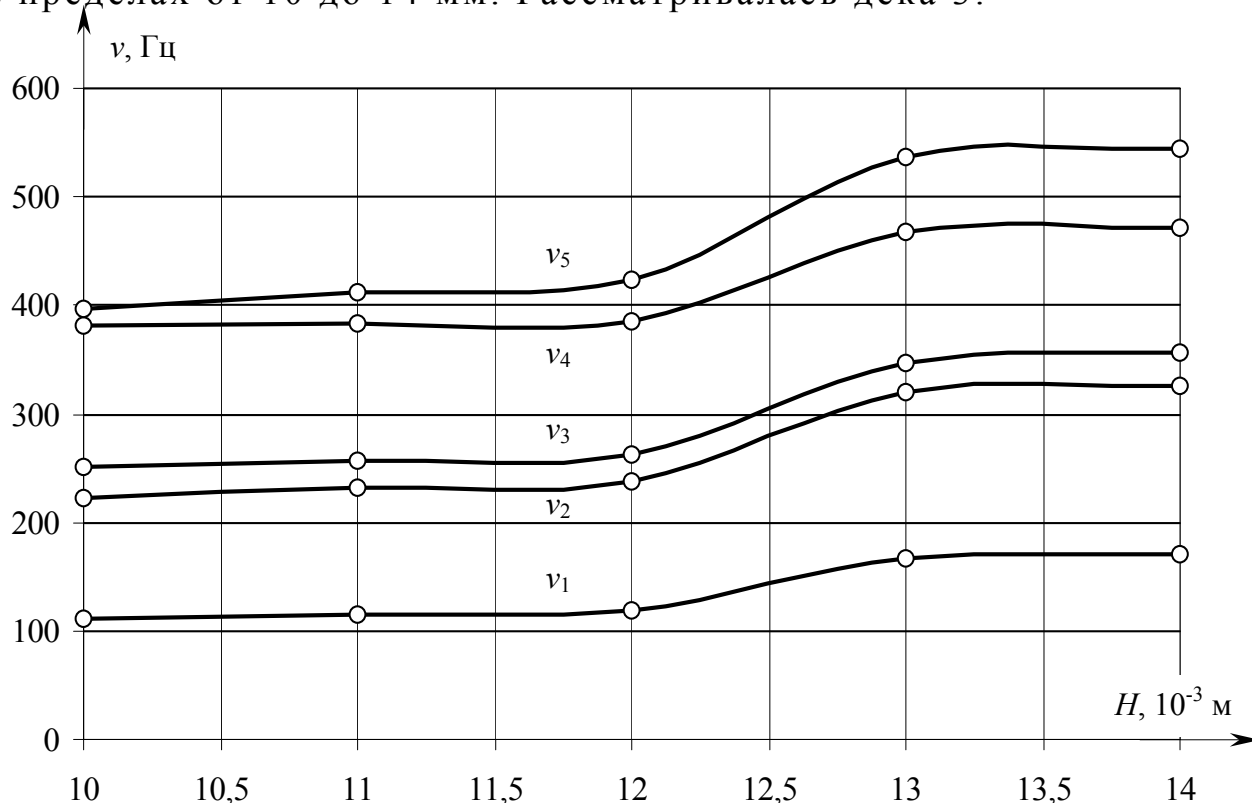


Рис.5.4. Зависимости низших собственных частот от поперечного размера пружинок

Констатируем, если при $H = 10$ мм собственные частоты располагаются в полосе от 112 до 397 Гц, то при $H = 14$ мм – от 170 до 545 Гц. Таким образом, увеличение высоты пружинок на 4 мм приводит к повышению собственных частот на 40...60 %. Причём, в области H от 10 до 12 мм изменения частот проявляются заметно слабее, чем в области H от 12 до 14 мм.

Таким образом, путём целенаправленного изменения размеров пластинки и пружинок можно регулировать динамические характеристики деки.

5.2.4. Влияние конструктивных факторов

В качестве конструктивных факторов рассматриваются резонаторное отверстие, подставка для крепления струн и особенности соединения деки с контрбечайкой. Вычислительные эксперименты ставятся на деке 1 (рис.3.2).

Таблица 15

Частота колебаний	Собственные частоты, Гц			
	Дека с отверстием		Дека без отверстия	
	Шарнир	Заделка	Шарнир	Заделка
ν_1	88	105	96	113
ν_2	126*	164	132*	168*
ν_3	187	250	194	255
ν_4	221*	266	228*	275
ν_5	225	291*	238	297*
ν_6	292*	366*	304*	377*
ν_7	310	373	309	379
ν_8	382	466	393	486
ν_9	402*	493*	415*	505*
ν_{10}	416	494	433	506

В табл.15 представлены 10 низших собственных частот в зависимости от способа закрепления деки по линии контура. Рассматриваются две схемы закрепления: шарнирное опирание и жёсткая заделка (защемление).

Констатируем, что при шарнирном опирании контура собственные частоты колебаний деки получаются заметно ниже, чем при защемлении. Это различие (почти на 30%) особенно заметно для второй и третьей собственных частот.

Кроме того, в табл.15 приведены результаты вычислений для деки с отверстием и деки без отверстия. Очевидно, отверстие уменьшает как жёсткость, так и массу деки. Поэтому собственные частоты деки с отверстием получаются ниже, чем деки без отверстия. В целом влияние отверстия не велико. Низшие собственные частоты различаются на 10%. Различие высоких частот выражено менее значительно.

Особый интерес представляет влияние элементов подкрепления на динамические характеристики деки. В этой связи, применительно к деке 2 (рис.3.2) анализируем собственные частоты на основании следующих расчётных схем:

- Пластика.
- Пластика с тремя пружинками.
- Пластика с тремя пружинками и подставкой для струн.

Сопоставительный анализ результатов, представленных в табл.16, обнаруживает следующую особенность. Прежде всего, пластика с тремя пружинками имеет более высокие собственные частоты, чем гладкая пластика, и это очевидно. Вместе с тем, три первые частоты колебаний пластики с пружинками и подставкой получаются ниже, чем пластики с пружинками, но без подставки для струн. То есть добавление к пружинкам подставки

для крепления струн не увеличивает, а наоборот, уменьшает низшие собственные частоты. А это уже не так очевидно.

Таблица 16

Частота колебаний	Собственные частоты, Гц		
	Пластинка	Пластинка с пружинками	Пластинка с пружинками и подставкой для струн
ν_1	88	162	103
ν_2	126*	260*	187*
ν_3	187	268	250
ν_4	221*	396	402
ν_5	225	424	422*
ν_6	292*	439	482*
ν_7	310	463*	523
ν_8	382	559*	568*
ν_9	402*	588*	640
ν_{10}	416	657*	737*

Подмеченная особенность, понижение низших собственных частот колебаний деки при добавлении отдельных деталей подкрепления, отмечается также в работах [61, 157].

5.3. Сопоставление частот собственных колебаний деки и струн

При разработке МИ собственные частоты деки МИ следует согласовывать с частотами собственных колебаний струн. Дело в том, что при колебаниях на близких частотах в упругой системе развиваются биения. На слух биения воспринимаются как периодическое усиление и ослабление громкости звука.

Помимо биений в системе проявляются эффекты негармоничности: отклонения обертонов колебаний от гармонического ряда. В результате чего нарушается чистота звука. Эффекты негармоничности, в частности, объясняются “подтягиванием” отдельных обертонов колебаний струн к резонансным частотам деки [61, 105, 113].

Кроме того, при колебаниях на близких частотах наблюдаются сильные взаимодействия струн с декой и наоборот, деки со струнами. Сильные взаимодействия могут служить причиной образования так называемых “волчьих тонов” - звук резко меняет свой характер, переходя от ровного тона к хрюкающему [159].

Будем считать струну абсолютно гибкой. Концевые сечения струн жёстко закреплены. В этом случае её поперечные колебания описываются волновым уравнением [18, 124]. Собственные частоты определяются формулой:

$$\nu_{ок} = \frac{\kappa}{2L_0} \sqrt{\frac{N_0}{m_0}}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

Здесь κ – порядковый номер формы колебаний, L_0 – длина, N_0 – сила натяжения, m_0 – масса единицы длины струны.

В результате прижатия струны к ладовой пластине её собственные частоты изменяются. Для расчёта основных частот воспользуемся соотношением [61]:

$$\nu_m / \nu_o = L_o / L_m = (2)^{m/12}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Здесь m – порядковый номер лада, ν_o и ν_m – частоты колебаний открытой и прижатой к m -му ладу струны, L_o и L_m – соответствующие длины рабочих частей. Ближний к порожку грифа лад считается первым.

Используя формулы (5.1), (5.2) и данные [61], считаем основные частоты колебаний струн семиструнной гитары с мензурой $L = 540$ мм (рис. 3.1). Расчет ограничиваем полосой

частот до 600 Гц. Рассматриваем 7 из 19-ти имеющихся ладов. Результаты расчётов сводим в табл.17.

Таблица 17

№ струны	Резонансные частоты, Гц							
	Открытая струна	№ лада						
		1	2	3	4	5	6	7
1	391,92	415,22	439,92	466,07	493,79	523,15	554,26	587,22
2	329,60	349,20	369,96	391,96	415,27	439,96	466,12	493,84
3	261,60	277,16	293,64	311,10	329,60	349,19	369,96	391,96
4	195,96	207,61	219,96	233,04	246,89	261,58	277,13	293,61
5	164,80	174,60	184,98	195,98	207,63	219,98	233,06	246,92
6	130,80	138,58	146,82	155,55	164,80	174,60	184,98	195,98
7	97,38	103,17	109,31	115,80	122,69	129,99	137,72	145,91

Сопоставительный анализ значений собственных частот струн (табл.17) и деки $h = 2,5$ мм (табл.14) позволяет выявить ряд близких значений. Выборка этих значений приведена в табл.18.

Таблица 18

№ струны	№ лада	Собственные частоты, Гц	
		Струна	Дека ($h = 2,5$ мм)
7	1	103,17	103
4	1	207,61	205
4	3	233,04	232
2	0	329,6	328
2	2	369,96	379
1	3	466,07	457
1	4	493,79	479
1	6	554,26	562

Из табл.18 следует, что ближе всего к резонансным частотам струн расположены первая ($\nu_1 = 103$ Гц), третья ($\nu_3 = 232$ Гц) и четвёртая ($\nu_4 = 328$ Гц) собственные частоты деки.

В табл.19 дана выборка близких значений собственных частот струн (табл.17) и деки $h = 3$ мм (табл.14).

Таблица 19

№ струны	№ лада	Собственные частоты, Гц	
		Струна	Дека ($h = 3$ мм)
7	4	122,69	120
4	3	233,04	239
3	0	261,6	262
1	0	391,92	384
1	1	415,22	424
1	5	523,15	531
1	6	554,26	557

Здесь ближе всего к резонансным частотам струн располагаются третья ($\nu_3 = 262$ Гц) и седьмая ($\nu_7 = 557$ Гц) собственные частоты деки. Очевидно, именно на этих частотах будут проявляться наиболее сильные взаимодействия.

Заметим, что нежелательные эффекты (биения, негармоничности обертонов, сильные взаимодействия струн с декой) на высоких частотах проявляются заметно слабее, чем на низких. С этой точки зрения вариант деки $h = 3$ мм оказывается более предпочтительным по сравнению с вариантом деки $h = 2,5$ мм.

Выводы по главе 5

1. В зависимости от натяжения струн колками исследовано напряжённое состояние деки. Построены картины распределений мембранных усилий. Установлено существенное влияние схемы подкрепления на напряжённое состояние.

2. Для трёх вариантов конструкций деки построены 10 низших собственных форм колебаний.

3. В зависимости от геометрических размеров, конструктивных факторов, а также начального НДС, выполнен анализ спектров 10 низших собственных форм и частот гитарной деки. В результате анализа установлены следующие закономерности:

- Усиление деки ребрами жесткости оказывает существенное влияние на ее собственные формы и частоты. Чем выше частота колебаний, тем сильнее проявляется это влияние. Для деки с подкреплениями (схемы 2 и 3) первые частоты различаются на 18% и 34%, шестые – на 60% и 80%, десятые – уже на 75% и 96% по сравнению с декой без подкреплений.

- Начальное напряженное состояние, обусловленное предварительным натяжением струн, практически не влияет на спектр собственных форм и частот колебаний деки.

- Увеличение толщины пластинки с 2,5 мм до 3 мм приводит к повышению собственных частот на 10...20%.

- Увеличение высоты ребер жесткости (пружинок) с 10 до 14 мм обуславливает повышение собственных частот на 40...60%.

- Условия закрепления деки по контуру оказывают заметное влияние на собственные частоты. Это влияние особенно заметно для второй и третьей собственных частот (различие около 30%).

- Влияние резонаторного отверстия в целом не велико. Низшие собственные частоты различаются на 10%. Различие более высоких частот выражено менее значительно.

- Подставка для крепления струн не увеличивает, а наоборот, уменьшает низшие собственные частоты.

4. Проведен сопоставительный анализ спектров собственных частот колебаний струн и двух вариантов конструкций деки. Установлено преимущество одного из вариантов конструкций.

Глава 6. Анализ резонансных характеристик

В последней шестой главе представлены результаты математического моделирования процесса установившихся колебаний деки в режиме силового гармонического возбуждения. Силовое возбуждение имитирует упругие вибрации струн.

Составлены матрицы статических податливостей точек крепления струн к деке. В диапазоне от 80 до 1400 Гц в зависимости от частоты возбуждения исследованы динамические податливости. Построены спектры резонансных амплитуд. Рассмотрены зависимости спектров резонансных амплитуд от схемы подкрепления, размеров рёбер жёсткости и уровня демпфирования.

6.1. Статические и динамические податливости

Способность деки вторить струне определяется степенью подвижности одной из её опор, связанной с декой. Струна "раскачивает" деку. Поэтому, чем выше упругая податливость деки, тем сильнее звук. В зависимости от податливости находится и длительность излучения звука.

Рассмотрим деку, схема которой изображена на рис.6.1. Точки крепления струн к деке (точнее к подставке для струн) обозначим $1, 2, \dots, 7$. Нумерация точек выполнена снизу вверх, от тонкой (дискантовой) струны к толстой (басовой). Точка 4 расположена на оси симметрии. Расстояние между струнами (шаг) $t = 10$ мм. Струны отстоят от срединной поверхности пластинки на расстоянии $e = 10$ мм. Толщина пластинки $h = 3$ мм.

Проанализируем статические податливости. Обозначим u_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 7$) – линейные перемещения в направлении струны i под действием единичных сил, приложенных в направлении j .

Соответственно w_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 7$) – линейные перемещения точек крепления струн i в направлении нормали к срединной поверхности пластинки под действием единичных сил, приложенных в направлении j .

Для расчета используем систему алгебраических уравнений (2.19), порядок системы – 9668. Учитываем деформации растяжения – сжатия, сдвига и изгиба стенки.

В табл.20 представлены составляющие упругих перемещений точек крепления струн под действием единичных сил, приложенных в направлении струн.

Таблица 20

Упругие перемещения $(u_{ij}/w_{ij}) \cdot 10^{-7}$ м/Н							
1	2	3	4	5	6	7	
$\frac{4,218}{0,432}$	$\frac{2,651}{0,737}$	$\frac{2,076}{0,973}$	$\frac{1,626}{1,143}$	$\frac{1,255}{1,256}$	$\frac{0,932}{1,330}$	$\frac{0,647}{1,369}$	1
$\frac{2,651}{0,876}$	$\frac{3,678}{0,512}$	$\frac{2,488}{0,710}$	$\frac{1,999}{0,914}$	$\frac{1,593}{1,090}$	$\frac{1,245}{1,233}$	$\frac{0,939}{1,347}$	2
$\frac{2,076}{1,342}$	$\frac{2,488}{0,928}$	$\frac{3,520}{0,596}$	$\frac{2,419}{0,765}$	$\frac{1,981}{0,973}$	$\frac{1,608}{1,171}$	$\frac{1,277}{1,352}$	3
$\frac{1,626}{1,702}$	$\frac{1,999}{1,343}$	$\frac{2,419}{0,996}$	$\frac{3,509}{0,686}$	$\frac{2,444}{0,893}$	$\frac{2,041}{1,137}$	$\frac{1,678}{1,393}$	4
$\frac{1,255}{1,962}$	$\frac{1,593}{1,716}$	$\frac{1,981}{1,449}$	$\frac{2,444}{1,168}$	$\frac{3,578}{0,921}$	$\frac{2,574}{1,169}$	$\frac{2,182}{1,493}$	5
$\frac{0,932}{2,155}$	$\frac{1,245}{2,059}$	$\frac{1,608}{1,929}$	$\frac{2,041}{1,759}$	$\frac{2,574}{1,552}$	$\frac{3,821}{1,338}$	$\frac{2,840}{1,679}$	6
$\frac{0,647}{2,292}$	$\frac{0,939}{2,405}$	$\frac{1,277}{2,480}$	$\frac{1,678}{2,513}$	$\frac{2,182}{2,480}$	$\frac{2,840}{2,368}$	$\frac{4,524}{2,169}$	7

Из таблицы видно, что составляющие u_{ij} обладают свойством симметрии, т.е. $u_{ij} = u_{ji}$. При этом $u_{77} > u_{11}$ и $w_{77} > w_{11}$. Эти нера-

венства достаточно очевидны, они обусловлены асимметрией конструкции подкрепления. Наименьшей податливостью в продольном направлении обладает точка крепления центральной струны 4, в поперечном направлении – точка крепления дискантовой струны (точка 1). Составляющие u_{ii} получаются заметно больше w_{ii} ($i = 1, 2, \dots, 7$).

При нагрузке 1Н упругие перемещения составляют тысячные доли миллиметра. Этот результат свидетельствует о значительной жесткости деки в направлении струн.

В табл.21 приведены составляющие упругих перемещений точек крепления струн при действии единичных сил, приложенных по нормали к срединной поверхности деки.

Таблица 21

Упругие перемещения (w_{ij}/u_{ij}), $\cdot 10^{-7}$ м/Н							
1	2	3	4	5	6	7	
126,848 0,432	116,635 0,878	106,522 1,342	96,469 1,702	86,491 1,962	76,545 2,155	66,650 2,292	1
116,635 0,737	112,071 0,512	105,758 0,929	99,194 1,343	92,478 1,716	85,661 2,059	78,784 2,405	2
106,522 0,973	105,758 0,710	104,513 0,596	101,607 0,996	98,303 1,449	94,739 1,929	90,990 2,480	3
96,469 1,143	99,194 0,914	101,607 0,765	103,621 0,689	103,906 1,168	103,759 1,759	103,274 2,513	4
86,491 1,256	92,478 1,090	98,303 0,973	103,906 0,893	109,108 0,921	112,630 1,552	115,639 2,480	5
76,545 1,330	85,661 1,233	94,739 1,171	103,759 1,137	112,630 1,169	121,246 1,338	128,069 2,368	6
66,650 1,369	78,784 1,347	90,990 1,352	103,274 1,393	115,639 1,493	128,069 1,679	140,541 2,169	7

Составляющие w_{ij} получаются симметричными, т.е. $w_{ij} = w_{ji}$. Выполняются следующие неравенства: $w_{77} > w_{11}$, $u_{77} > u_{11}$. Податливости отдельных точек значительно отличаются друг от друга. Составляющие w_{ij} значительно превышают u_{ij} .

Сопоставление данных табл.20 и табл.21 позволяет сделать вывод, что податливость деки в направлении струн (в продольном направлении) почти на два порядка получается меньше, чем податливость деки в направлении нормали (в поперечном направлении). Выполняется принцип взаимности перемещений w_{ij} (табл.20) = u_{ji} (табл.21).

Далее, в зависимости от частоты возбуждения проанализируем динамические податливости. Для этого рассмотрим режим установившихся вынужденных колебаний. Источником возбуждения считаем упругие вибрации струн, совершающие колебательные движения “в плоскости” деки. Струна возбуждается “щипком”: для этого её предварительно оттягивают, затем – отпускают.

Сделаем одно важное отступление. Экспериментально установлено: логарифмический декремент колебаний для деки $\delta = 0,377$ (табл.6, стр.87), для металлической струны $\delta = 0,0004$ [61]. Следовательно, длительность свободных вибраций струн, как автономной динамической системы, почти на три порядка выше, чем деки. В этих условиях, очевидно, упругие вибрации струн можно рассматривать как свободные (возбуждение обусловлено начальным воздействием), а колебательные движения деки – как вынужденные. С некоторым приближением процесс силового возбуждения можно считать гармоническим.

Для расчета установившихся амплитуд воспользуемся системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2.18). Колеба-

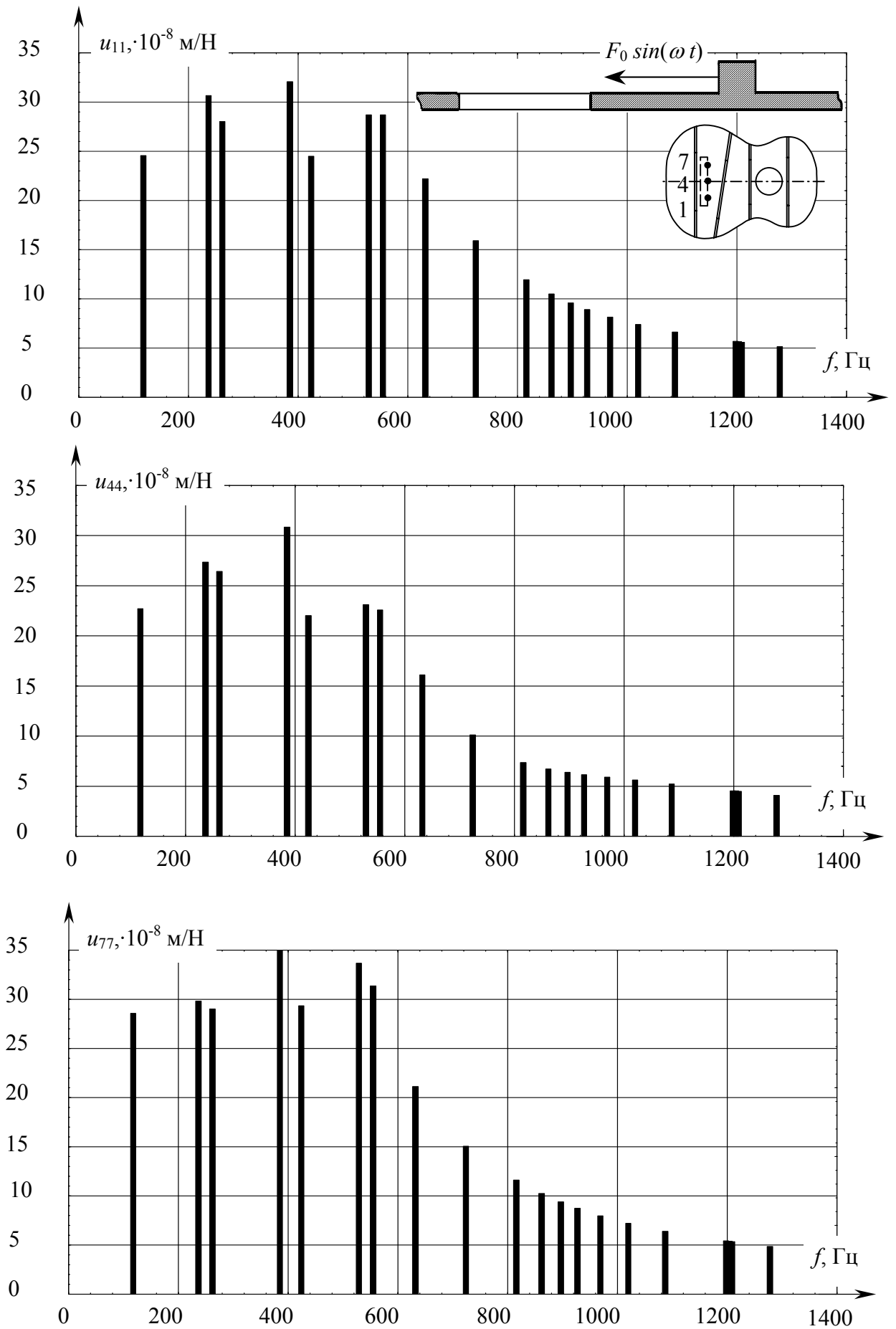
тельные движения деки представим в виде суперпозиции 20-ти низших собственных форм.

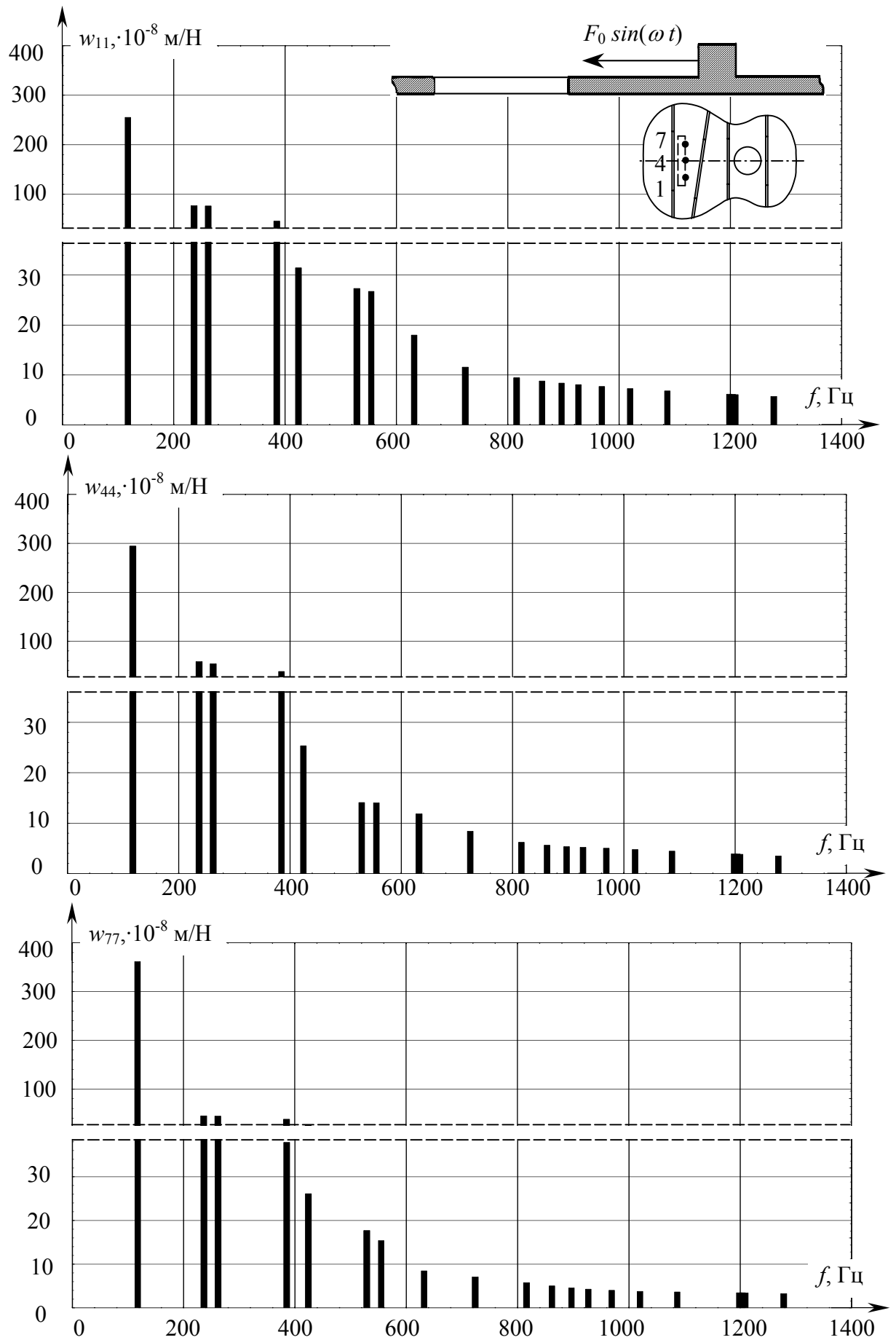
На рис.6.1 динамические податливости u_{11} , u_{44} , u_{77} построены в виде спектра амплитуд, рассчитанных на резонансных частотах. Констатируем, динамические податливости зависят от частоты возбуждения. Наибольшие податливости наблюдаются на 8-ми первых резонансных частотах в диапазоне до 630 Гц. Именно на этих частотах следует ожидать наиболее громкие звуки.

По мере увеличения частоты возбуждения резонансные амплитуды плавно уменьшаются. Характеры изменений амплитуд u_{11} , u_{44} , u_{77} в зависимости от частоты возбуждения, в целом, являются идентичными.

Динамические податливости подчиняются тем же закономерностям, что и статические податливости. Струны 1 и 7, расположенные по краям подставки, вызывают более сильные реакции деки, чем центральная струна 4.

На рис.6.2 построены динамические податливости w_{11} , w_{44} , w_{77} , рассчитанные в направлении нормали к поверхности деки в зависимости от частоты возбуждения. Следует отметить, что амплитуды w_{jj} ($j = 1, 4, 7$) на первой резонансной частоте значительно превосходят остальные. При этом $w_{77} > w_{44} > w_{11}$. По мере увеличения частоты возбуждения динамические податливости плавно уменьшаются.

Рис.6.1. Динамические податливости деки (u_{ii})

Рис.6.2. Динамические податливости деки (w_{ii})

6.2. Зависимость резонансных амплитуд от схемы подкрепления

Очевидно, что возбуждение получается тем сильнее, чем больше масса, сила натяжения и амплитуда вибраций струны. Рассмотрим поведение деки при гармонических вибрациях басовой струны 7. Амплитуду вибрационной нагрузки примем $F_0 = F_7/10 = 10,1$ Н. Здесь F_7 – сила предварительного натяжения басовой струны (стр. 105). Схема приложения нагрузки показана на рис.6.1.

Исследуем 3 варианта конструкции подкрепления: варианты 1 и 2 – схемы 2 и 3 на рис.4.2 и вариант 3 – схема на рис.6.3.

Для варианта 3 размеры поперечного сечения пружинок $B \times H = 5 \times 4$ мм; длины $L_1 = L_6 = 200$ мм, $L_2 = L_5 = 210$ мм, $L_3 = L_4 = 220$ мм. Толщина пластинки $h = 3$ мм.

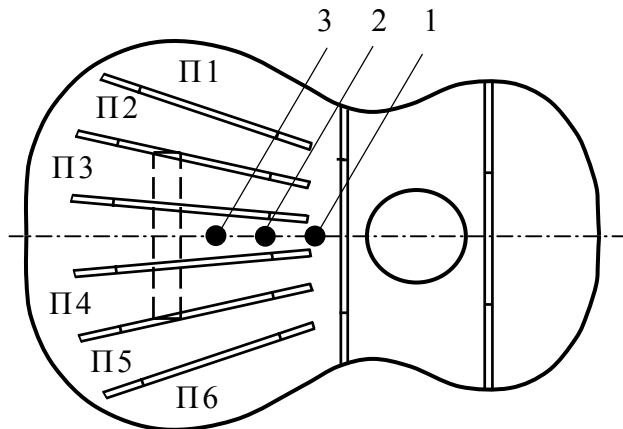


Рис.6.3. Комбинированная схема подкрепления

Отметим, что в отличие от вариантов 1 и 3, вариант подкрепления 2 не обладает свойством симметрии. Варианты 1 и 2 соответствуют схемам с поперечным расположением пружинок, вариант 3 – комбинированной схеме (сочетание поперечного и веерного расположения пружинок).

Выполним расчеты амплитуд виброперемещений точек 1, 2, 3 (рис.6.3) на 20-ти низших резонансных частотах. Для расчета

воспользуемся методикой, представленной в разделе 2. Для каждого варианта подкрепления примем характеристику демпфирования $\delta = 0,377$.

На рис.6.4 – 6.6 представлены спектры расчетных амплитуд виброперемещений точек 1, 2, 3. Из анализа спектрального состава амплитуд следует, – для симметричных вариантов подкреплений 1 и 3 имеет место резкое отличие амплитуд на частотах $f = \nu_1$ и $f = \nu_2$. Это обстоятельство объясняется тем, что первая собственная форма колебаний деки является симметричной, а вторая – кососимметричной (рис.5.2). Точки 1, 2, 3 расположены на линии симметрии, которая для кососимметричной формы совпадает с узловой линией. Каждая собственная форма по-своему реагирует на действие вибрационной нагрузки. Вот почему каждая точка деки имеет свой собственный спектр резонансных амплитуд.

Причём, при переходе от точки 1 к точке 3 проявляются достаточно противоречивые тенденции. Независимо от варианта подкрепления амплитуды колебаний на первой собственной частоте ($f = \nu_1$) увеличиваются, на более высоких частотах ($f = \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{20}$), наоборот, уменьшаются.

Распределения резонансных амплитуд для вариантов 2 и 3 получаются более однородными, чем для варианта 1. Спектр резонансных амплитуд для варианта 3 получается более плотным, чем для варианта 2. В первом случае $\nu_{20} = 1116$ Гц, во втором $\nu_{20} = 1278$ Гц.

Это обстоятельство (более однородный и плотный спектр резонансных амплитуд) позволяет ожидать, что дека с комбинированной схемой подкрепления будет излучать более яркий, насыщенный обертонами звук.

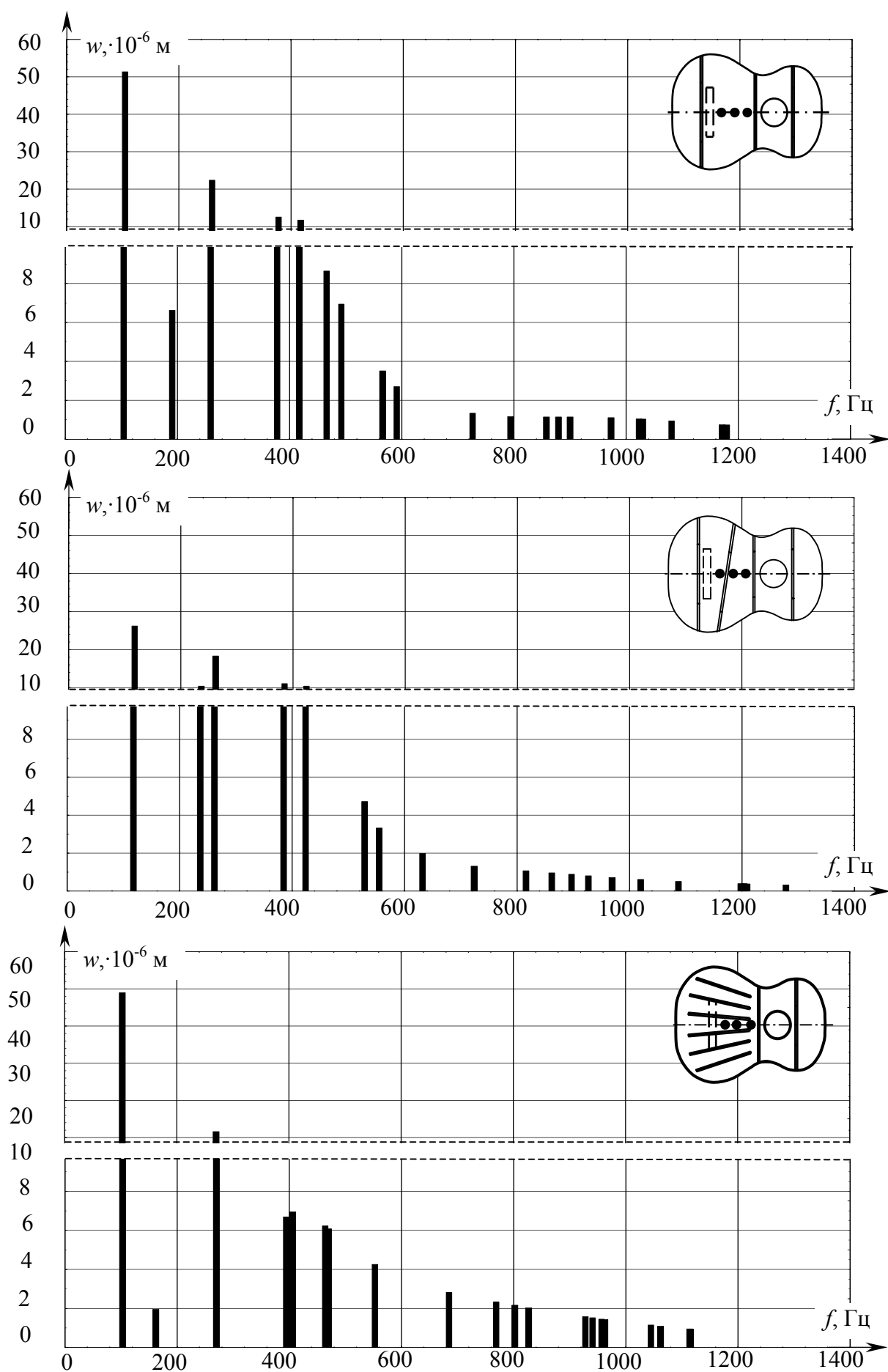


Рис.6.4. Спектры амплитуд виброперемещений точки 1

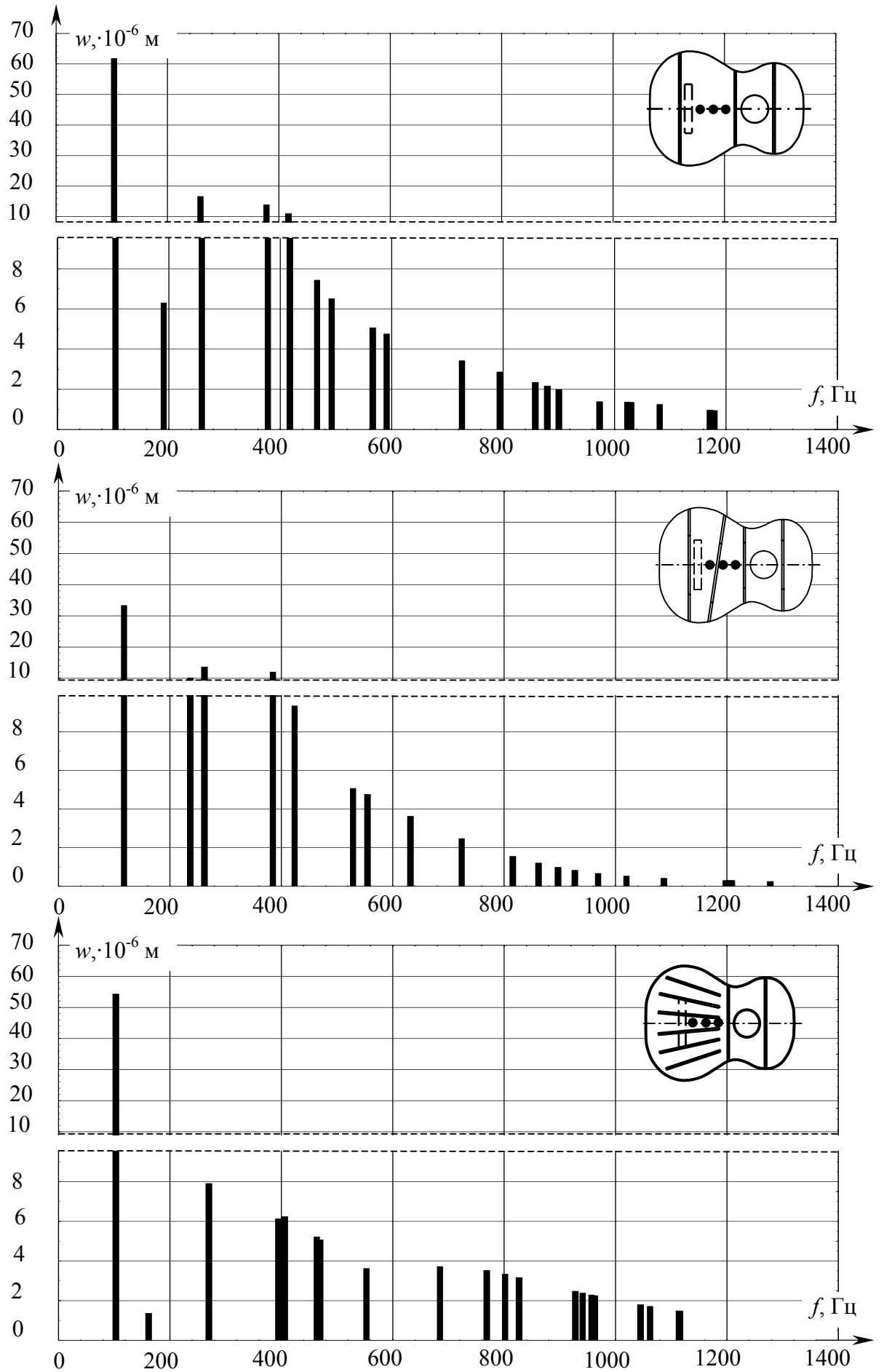


Рис.6.5. Спектры амплитуд виброперемещений точки 2

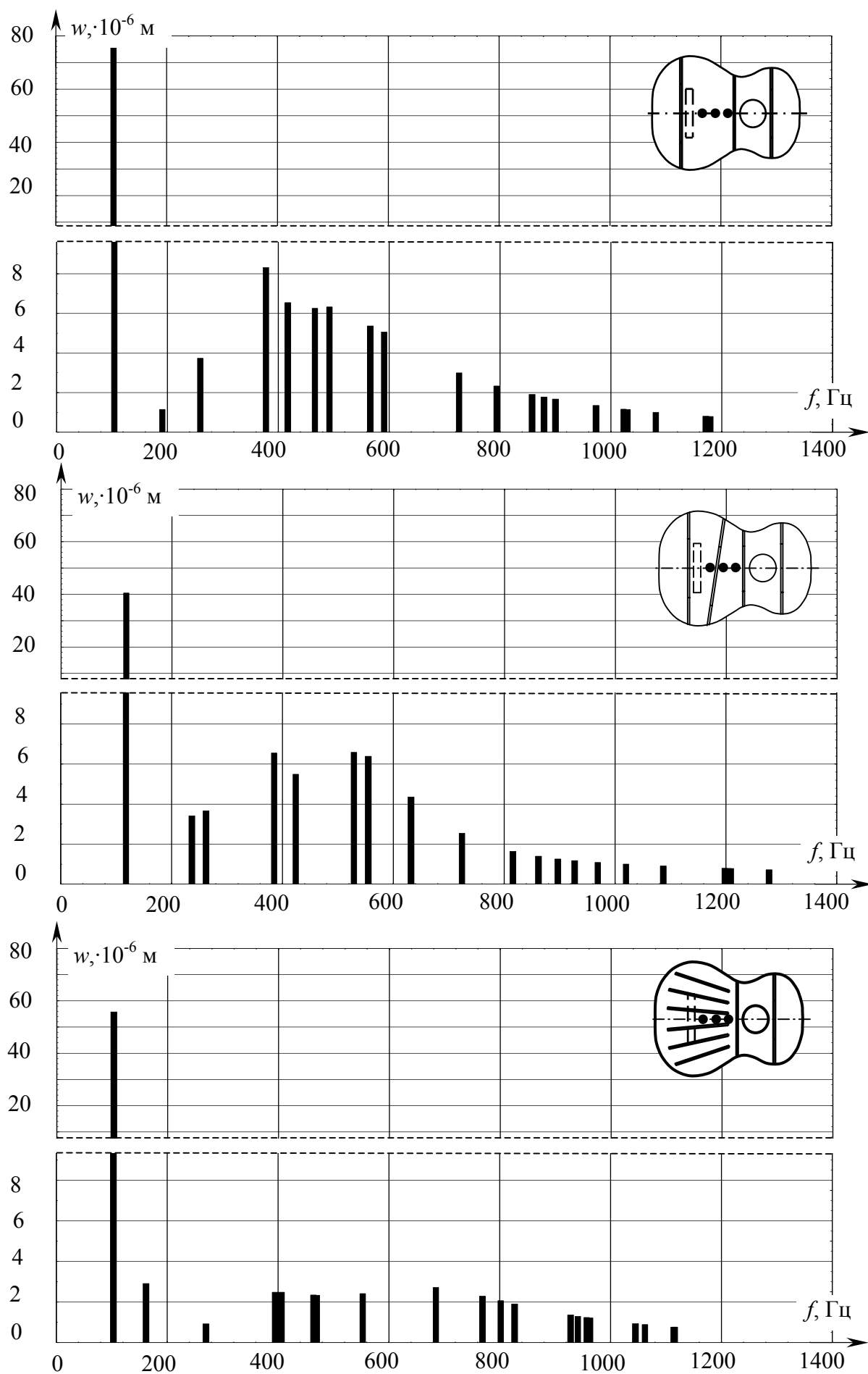


Рис.6.6. Спектры амплитуд виброперемещений точки 3

6.3. Зависимость резонансных амплитуд от высоты рёбер жёсткости

В разделе 5.2.3 показано, что с увеличением высоты рёбер жёсткости (пружинок) собственные частоты деки увеличиваются. Проанализируем влияние размеров рёбер жёсткости на амплитуды вынужденных колебаний. Рассмотрим деку 3 (рис.4.2). Примем высоту пружинки $H = 12, 13$ и 14 мм. Процесс возбуждения колебаний связываем с гармоническими вибрациями струны 1. Считаем амплитуду вынуждающей силы $F_0 = F_1/10 = 7,1$ Н, где F_1 – сила предварительного натяжения струны 1 (стр. 105). Логарифмический декремент колебаний $\delta = 0,377$.

На рис.6.7 представлены спектры амплитуд виброперемещений точки 3, рассчитанные на 20-ти низших резонансных частотах. Результаты свидетельствуют, с увеличением размера H амплитуды колебаний на первой резонансной частоте увеличиваются, остальные, наоборот, уменьшаются. При $H = 12$ мм спектр резонансных амплитуд получается более ровным и плотным по составу, чем при $H = 14$ мм. В первом случае $\nu_{20} = 1280$ Гц, во втором $\nu_{20} = 1453$ Гц.

Отметим, полученные результаты касаются виброперемещений точки 3, близко расположенной к подставке для струн. Очевидно, спектры резонансных амплитуд других точек деки могут отличаться от точки 3.

Вместе с тем нельзя не отметить, что отдельные составляющие спектра колебаний не подчиняются общим закономерностям. Так амплитуды колебаний на второй резонансной частоте практически не изменяются. Амплитуды шестой, восьмой и девятой составляющих спектра с увеличением H не уменьшаются, а наоборот, несколько увеличиваются.

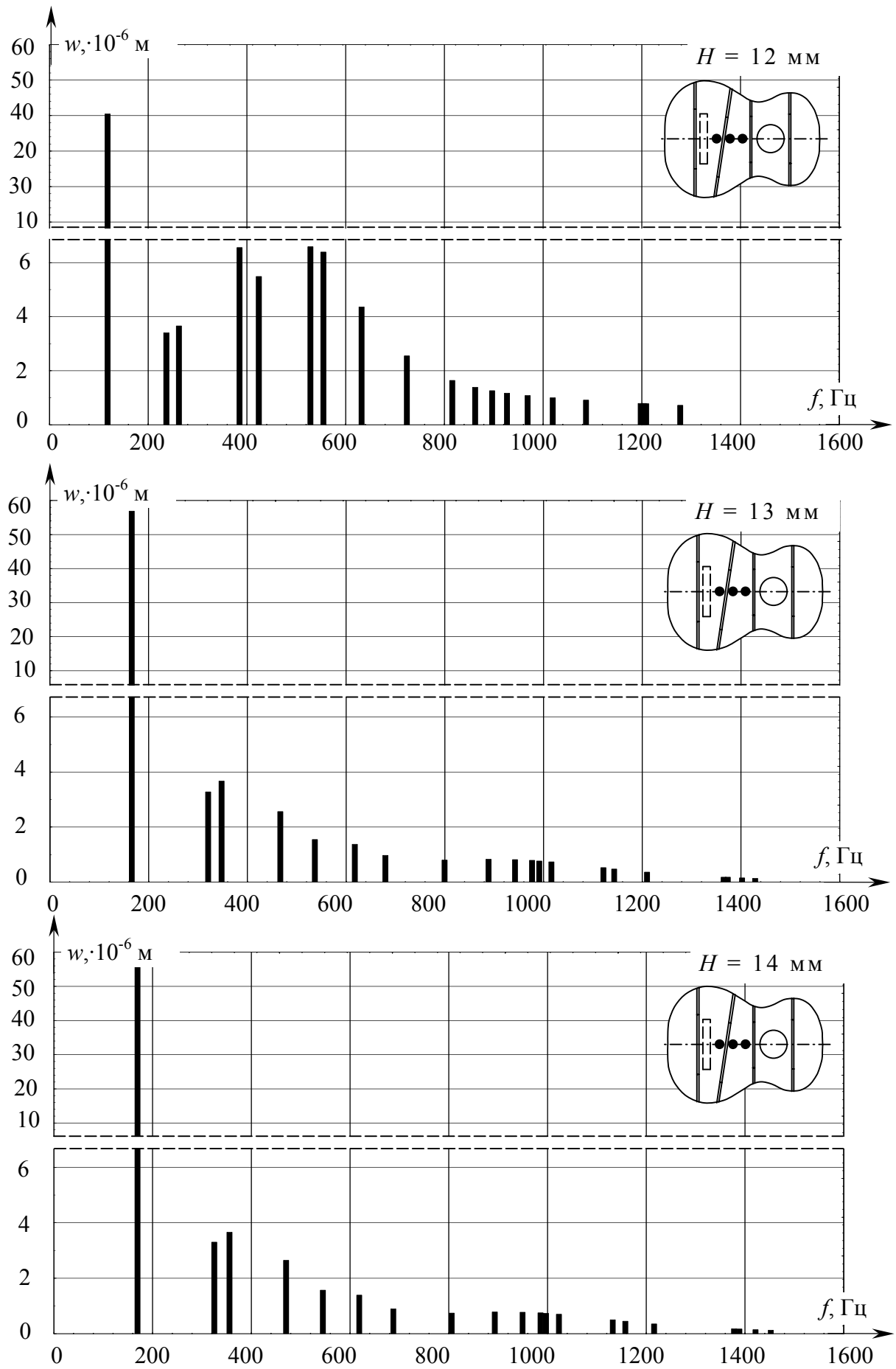


Рис.6.7. Спектры резонансных амплитуд в зависимости от высоты рёбер жёсткости

6.4. Зависимость резонансных амплитуд от уровня демпфирования

Известно, что тембр, чистота и длительность излучения звука зависят от способности деки демпфировать упругие колебания. Идеальной принято считать деку, которая равномерно усиливает колебания во всем диапазоне частот возбуждения.

Рассмотрим спектры резонансных амплитуд колебаний деки 3 (рис.4.2) в зависимости от уровня демпфирования. Демпфирование описываем на основании экстраполяции (2.46). Процесс возбуждения колебаний считаем как моногармонический. Силу с амплитудой $F_0 = 1\text{Н}$ прикладываем в точке 1 в направлении нормали к плоскости деки. Приведенные амплитуды виброперемещений, нормальных к плоскости деки, фиксируем в точке 1 (рассчитываем по формуле (4.2)).

На рис.6.8 представлены спектры резонансных амплитуд, рассчитанные при логарифмических декрементах $\delta = 0,157$; $\delta = 0,377$; $\delta = 0,628$ соответственно. На основании сопоставительного анализа спектров амплитуд отметим следующие характерные особенности:

- С увеличением логарифмического декремента δ от 0,157 до 0,628 в области низших частот резонансные амплитуды уменьшаются в 3 – 4 раза.
- Изменение амплитуд в области средних и высших частот проявляется менее значительно. В результате чего состав спектра резонансных амплитуд становится более однородным.

На практике диссипативные свойства дек струнных МИ регулируются, в частности, путем надлежащего подбора конструкционных материалов, состава клеев и лаковых покрытий.

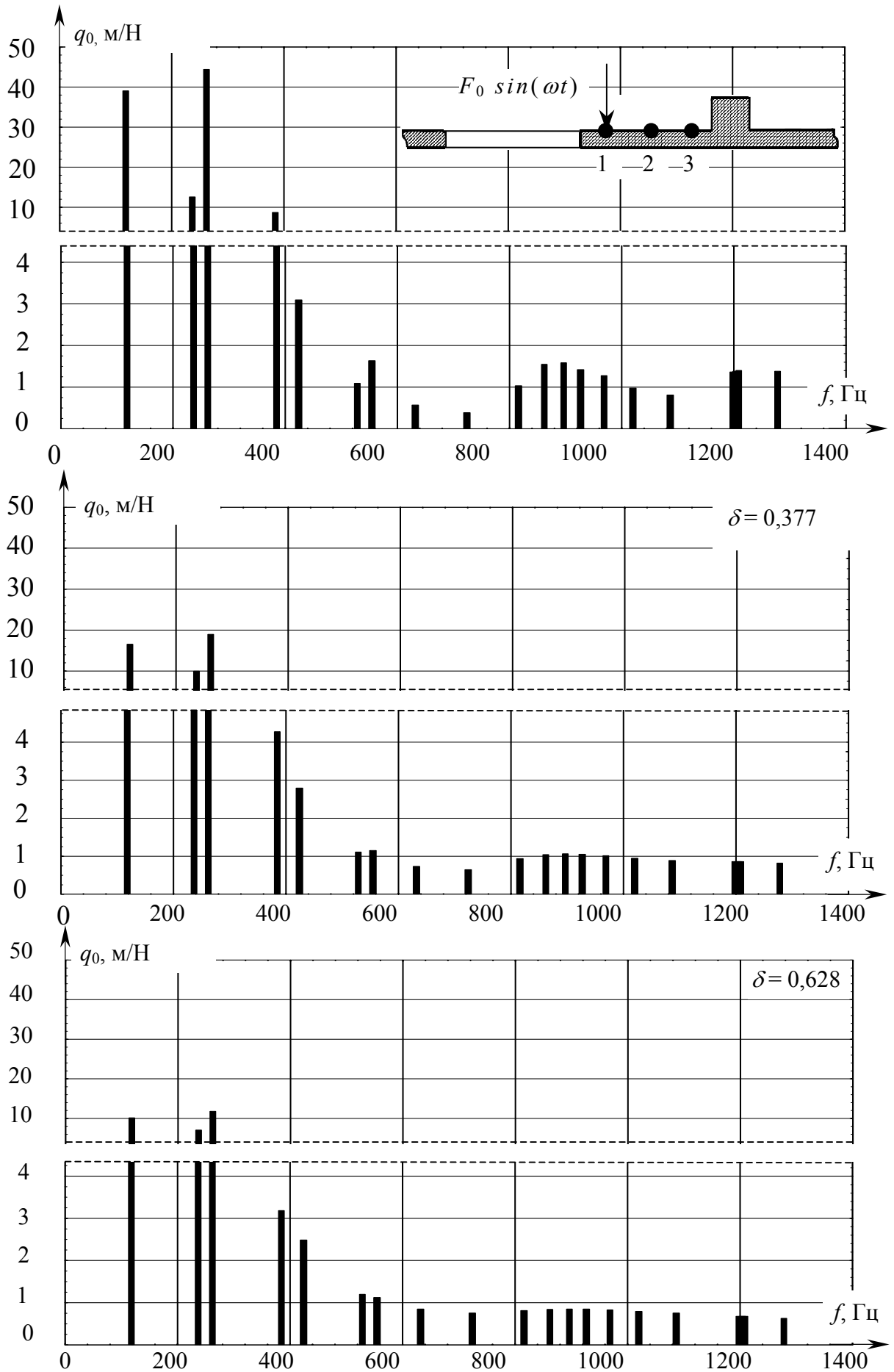


Рис.6.8. Спектры резонансных амплитуд в зависимости от уровня демпфирования

Выводы по главе 6

1. Составлены матрицы статических податливостей точек крепления струн к деке. Показано, что наименьшей податливостью в продольном направлении обладает точка крепления центральной струны, наибольшей – точки крепления басовой и дискантовой струн, расположенных по краям подставки. Податливость деки в направлении струн получается почти на два порядка меньше, чем податливость деки в направлении нормали.

2. Динамические податливости представлены в виде спектров амплитуд, рассчитанных на резонансных частотах в полосе от 80 до 1400 Гц. Установлено, что наибольшие динамические податливости имеют место до 630 Гц. По мере увеличения частоты возбуждения динамические податливости плавно уменьшаются. Струны, расположенные по краям подставки, вызывают более сильные динамические реакции, чем центральная струна.

3. Показано, что динамическая податливость деки на первой резонансной частоте в поперечном направлении на порядок выше, чем в продольном.

4. Исследованы зависимости спектров резонансных амплитуд от схемы подкрепления деки. Показано, что комбинированная схема, сочетающая поперечное и веерное расположение пружинок, имеет более ровный и плотный спектр амплитуд по сравнению с поперечным расположением пружинок.

5. Показано, что в условиях силового гармонического возбуждения, имитирующего упругие вибрации струн, различные точки деки имеют свои собственные спектры резонансных амплитуд.

6. Рассмотрены зависимости спектров резонансных амплитуд от высоты рёбер жёсткости (пружинок). Установлено, что с увеличением размеров пружинок амплитуды колебаний на первой

резонансной частоте увеличиваются, остальные, наоборот, уменьшаются.

7. Выполнен анализ зависимостей спектров резонансных амплитуд от уровня демпфирования. Установлено, что с увеличением демпфирования резонансные амплитуды уменьшаются, состав спектра амплитуд становится более однородным.

Общие выводы

Получено решение прикладной научно-технической проблемы, имеющей важное народно-хозяйственное и социально-культурное значение, в рамках которой решены следующие задачи:

1. Разработана методика исследований динамики корпусных элементов конструкций струнных МИ.

2. Построена конечно-элементная динамическая модель резонансной деки. Элементы корпуса представлены как предварительно напряжённые тонкостенные слоистые оболочки с асимметричным набором рёбер жёсткости. Разрешающая система уравнений получена на основе смешанной вариационной формулировки Хеллингера – Рейсснера и теории тонких оболочек Тимошенко. Расчётная модель реализована в виде компьютерной программы.

3. Путём сопоставительного анализа результатов расчётов с данными известных аналитических и численных решений, а также прямого эксперимента, поставленного на реальной конструкции, дано обоснование разработанной модели МКЭ. Рассмотрены задачи статики, динамики и устойчивости.

4. Проведено экспериментальное исследование механических колебаний гитарной деки. С этой целью спроектирована и изготовлена специальная установка. Разработаны методики измерений собственных частот и форм, констант демпфирования и амплитуд вынужденных колебаний. На основании методики Хладни исследованы низшие собственные формы.

5. Поставлена серия экспериментов, в ходе которых определены физико-механические характеристики материалов и установлены породы древесины.

6. В зависимости от натяжения струн колками исследованы упругое деформирование и напряжённое состояние деки.

7. Проведены вычислительные эксперименты. На примере гитарной деки исследовано влияние конструктивных и технологических факторов на спектр колебаний.

8. На основе сопоставительного анализа спектров собственных частот струн и двух вариантов конструкций гитарной деки установлено преимущество одного из вариантов.

9. В полосе частот от 80 до 560 Гц построены АЧХ гитарной деки. Исследованы зависимости АЧХ от точки приложения вибрационной нагрузки и схемы подкрепления деки рёбрами жёсткости.

10. С целью оценки влияния акустической внутренней полости и струн на динамические характеристики деки проведены эксперименты. Результаты измерений обработаны при помощи методов цифрового спектрального анализа.

11. Получены значения статических и динамических податливостей точек крепления струн к деке.

12. Построены спектры резонансных амплитуд гитарной деки в условиях гармонического возбуждения, имитирующего упругие вибрации струн.

В результате анализа поведения деки акустической гитары установлены следующие закономерности:

- Подкрепление деки рёбрами жёсткости оказывает существенное влияние на её собственные формы и частоты, приводит к заметному уменьшению амплитуд колебаний.

- Рёбра жёсткости увеличивают демпфирующую способность деки. Дека с подкреплениями обладает более ровным спектром резонансных амплитуд, чем дека без подкреплений.

- Акустический резонатор “обогащает” спектр резонансных амплитуд деки новыми компонентами.
- Собственные частоты деки с резонатором мало отличаются от собственных частот деки без резонатора.
- Начальное напряжённое состояние, обусловленное предварительным натяжением струн, практически не оказывает влияния на спектр колебаний деки.
- Спектры колебаний деки проявляет высокую чувствительность к изменениям толщины пластинки и высоты рёбер жёсткости, к условиям закрепления деки по контуру.
- Басовые и дискантовые струны, расположенные по краям подставки, вызывают более сильные динамические реакции, чем центральная струна.
- Наибольшие динамические податливости деки наблюдаются в полосе до 630 Гц. По мере увеличения частоты возбуждения динамические податливости плавно уменьшаются.
- Комбинированная схема подкрепления, сочетающая поперечное и веерное расположение пружинок, обладает более ровным и плотным спектром резонансных амплитуд по сравнению с поперечным расположением пружинок.
- В условиях силового моногармонического возбуждения, имитирующего упругие вибрации струн, каждая точка деки имеет свой собственный спектр резонансных амплитуд.

Разработанная в диссертации методика расчёта внедрена на фирме по производству музыкальных инструментов ЗАО “Этюд-Урал”. Результаты математического моделирования используются на практике при проектировании и производстве акустических гитар с мензурой 650 мм. Компьютерные программы применяются в учебном процессе МарГТУ в курсах “Основы

автоматизированного проектирования изделий” и “Численные методы в инженерном деле”.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 311 с.
3. *Амбарцумян С.А.* Общая теория расчета анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
4. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* Многослойные анизотропные пластины и оболочки: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
5. *Андреев Н.Н.* О дереве для музыкальных инструментов // Сб. тр. НИИМП. – М. – Л. – 1938. – Вып.1. – С.11–18.
6. *Ашкенази Е.К., Ганов Э.В.* Анизотропия конструкционных материалов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
7. *Артамонов С.С.* Замечания инженера о механизмах звучания инструментов скрипичного семейства// Музыкальная академия. – 1996. – №3. – С.121–124.
8. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 559 с.
9. *Бакулин В.Н., Рассоха А.А.* Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. – М.: Машиностроение, 1987. – 312 с.
10. *Бандас Л.Л., Кузнецов И.А.* Производство и ремонт щипковых музыкальных инструментов. – М.: Лёгкая пром-сть, 1983. – 288 с.
11. *Bate К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

12. *Белкин А.Е., Гаврюшин С.С.* Расчет пластин методом конечных элементов: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 151 с.

13. *Белов А.И.* Исследования дек клавишных инструментов // Отчет НИИМП. – Л., 1940.

14. *Белов А.И., Угольников Н.И.* Частотные характеристики излучения дек клавишных инструментов// Сб. трудов НИИМП.– 1941. – Вып.3. – С.34–48.

15. *Белов С.И., Бандас Л.П., Минин А.Е.* Щипковые музыкальные инструменты. – М.: Голесбумиздат, 1963.– 240 с.

16. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды.– М.: Наука, 1983.– 448 с.

17. *Берт Ч.* Расчет оболочек// Композиционные материалы. В 8-ми т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.7, Ч.1. Анализ и проектирование конструкций – С.210–264.

18. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

19. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов.– М.: Наука, 1986. – 560 с.

20. *Болотин В.В., Москаленко В.Н.* Колебания пластинок // Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. В 3-х т. / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – С.370–416.

21. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.

22. *Болотин В.В., Макаров Б.П., Мишенков Г.В. и др.* Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок.// Расчеты на прочность.- М.: Машгиз, 1960. – Вып.6. – С.231–253.

23. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
24. *Брэгг У.* Мир света. Мир звука. – М. Наука. 1967. – 335с.
25. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 302 с.
26. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
27. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
28. Вибрации в технике: Справочник в 6 т./ Колебания линейных систем/ Под редакцией *Болотина В.В.* – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1. – 352 с.
29. Вибрации в технике: Справочник в 6 т./ Колебания машин конструкций и их элементов/ Под редакцией *Диментберга Ф.М.* и *Колесникова К.С.* – М.: Машиностроение, 1980. – Т.3 – 544 с.
30. *Витачек О.Е.* Очерки по изготовлению музыкальных инструментов. – Музгиз, 1952.
31. *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбовский А.Т.* Статика и динамика сложных структур. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с.
32. *Винсон Ж.Р., Сираковский Р.Л.* Поведение конструкций из композиционных материалов. – М.: Металлургия, 1991. – 264 с.
33. *Гаврюшин С.С., Коровайцев А.В.* Методы расчета элементов конструкций на ЭВМ. – М.: Изд-во ВЗПИ, 1991. – 160 с.
34. *Галембо А.С.* Фортепиано. Качество звучания. – М.: Легпромбытиздат, 1987. – 163 с.

35. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
36. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань: Изд-во “ДАС”, 2001. – 301 с.
37. *Горбачев К.П.* Метод конечных элементов в расчетах прочности. – Л.: Судостроение, 1985. – 156 с.
38. *Гутин Л.Я.* Расчёт мандолины // Журнал технической физики. – 1937. – Т.7, № 10. – С.78-85.
39. *Демьянов Ю.А.* К уточнению теории колебаний музыкальных струн // Докл. РАН. – 1999. – 36, №4. – С.461–465.
40. *Ден-Гартог Дж.П.* Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960. – 580 с.
41. *Донелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568с.
42. *Дьяконов Н.А.* Производство роялей и пианино. – Росгизместпром, 1955. – 370с.
43. *Еременко С.Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Изд-во "Основа" при ХГУ, 1991. – 272 с.
44. *Ефремов А.* Формула идеальной скрипки// Химия и жизнь. – 1979. – №10 – С.89–93.
45. *Журавлев, В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
46. *Звездкина Г.Г.* Разработка акустической теории формирования положительных музыкально-акустических свойств щипковых инструментов// Техническая акустика. – 1992. – Т.1., №2. – С.67–72.

47. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
48. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
49. *Зиновьев П.А.* Расчет конструкций из композиционных материалов: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1982. – 62 с.
50. *Зиновьев П.А.* Прочностные, термоупругие и диссипативные характеристики композитов// Композиционные материалы: Справочник/ Под ред. *В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского.* – М.: Машиностроение, 1990. – С.232–267.
51. *Зиновьев П.А.* Диссипативные свойства монослоя // Машиностроение: Энциклопедия/ Под ред. *К.С. Колесникова.* – М.: Машиностроение, 1994. – Т.1–3, Кн.1. – С.304–306.
52. *Кармишин А.В.* К теории упругих тонкостенных элементов с учетом поперечных сдвигов// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: ГГУ, 1986. – С.7–17.
53. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
54. *Кноэлл А., Робинсон Е.* Расчет ферм, балок, рам и тонкостенных элементов// Композиционные материалы: В 8-ми т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.7., Ч.1. Анализ и проектирование конструкций. – С.108–153.
55. *Козловский А.* Черные скрипки конца 20 века// Химия и жизнь. – 1977. – №5. – С.40–43.
56. *Комаров Н.А.* Совершенствование экспериментальной установки для исследования щипковых музыкальных инструментов// Некоторые вопросы механики древесины. Тр. МЛТИ. – М., 1975. – Вып.69. – С.168–170.

57. *Комаров Н.А.* Уточненный расчет мензуры щипковых музыкальных инструментов//Новое в технологии и материалах деревообрабатывающей промышленности. Тр. МЛТИ. – М., 1987. – Вып.190. – С.94–98.

58. *Корн. Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

59. *Корсаков Г.С.* Технология музыкальных инструментов из древесины: Учебное пособие.– Л.: ЛТА, 1986. – 73 с.

60. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов.– М.: Мир, 1982. – 334 с.

61. *Кузнецов Л.А.* Акустика музыкальных инструментов: Справочник. М.: Легпромбытиздат, 1989. – 368 с.

62. *Куликов Ю.А., Шлычков С.В.* Компьютерная динамическая модель музыкального струнного инструмента как композитной конструкции// Композиционные материалы в авиастроении и народном хозяйстве: Материалы Всерос. науч.-техн. конф. – Казань, 1999. – Ч.2. – С.36.

63. *Куликов Ю.А., Шлычков С.В.* Математическая постановка задачи расчета частотных характеристик гитарных дек музыкальных струнных инструментов// Четвертые Вавиловские чтения: Диалог науки и практики в поисках новой парадигмы общественного развития России в новом тысячелетии: Материалы постоянно действующей всерос. междисциплинар. науч. конф. – Йошкар-Ола, 2000. – Ч.3. – С. 212–215.

64. *Куликов Ю.А., Шлычков С.В.* Анализ собственных форм и частот верхней и нижней дек классической гитары // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т.6, №4. – С.551–561.

65. *Кулиш Г.Г., Шлычков С.В.* О влиянии диссипативных свойств на динамическую реакцию гитарной деки

// XX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин: Сб. докл. – Н. Новгород, 2002. – С.202–207.

66. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.

67. Леман А.И. Акустика скрипки.–М.: Изд-во П. Юргенсона, 1903. – 187 с.

68. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.– М.: Наука. ГРФМЛ, 1977.– 416 с.

69. Лэмб Г. Динамическая теория звука.– М.: Физматгиз, 1960.– 274 с.

70. Макарьева Т.А. Исследование акустических характеристик древесины, используемой для дек музыкальных инструментов, и разработка методов их контроля в условиях производства: Автореф. дис... канд. техн. наук/ МЛТИ. – М., 1976.

71. Макарьева Т.А., Хрипунов А.К. и др. Применение целлюлозы АСЕТОВАСТЕР ХУЛИНИУМ (ЦАХ) для улучшения акустических характеристик древесины// Тез. докл. 2-го международного симпозиума "Строение, свойства и качество древесины" – 1996. – М.: МГУЛ – 1996. – С.63.

72. Мальгина Л.А. Проведение испытаний гитарных струн: Отчёт НИИКТМП – М., 1982.

73. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М: Наука, 1972. – 470 с.

74. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

75. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. Думка, 1985. – 263 с.

76. Машиностроение: Энциклопедия. В 40 т. Т.1 – 3. Кн.1: Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1994. – 533 с.

77. Механические колебания. Основные понятия. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сб. рекомендуемых терминов. – М.: Наука, 1985. – 23 с.

78. *Мэнли Р.* Анализ и обработка записей колебаний. – М.: Машиностроение, 1972. – 368 с.

79. *Наседкин А.В.* Конечно-элементное моделирование на основе ANSYS. Программы решения статических задач сопротивления материалов с вариантами индивидуальных заданий. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1998. – 44 с.

80. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Д.* Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.

81. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 655 с.

82. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

83. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1985. – 329 с.

84. *Остроумов Г.А.* Материалы по акустическому расчету фортепианных дек// Тр. НИИМП. – Вып.1. – 1938.

85. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. – М.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

86. *Пановко, Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 194 с.

87. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 688 с.

88. *Паршина С.В., Порвенков В.Г., Челноков Н.Н.* Исследование акустических и физико-механических параметров дек гитар и виолончелей// Повышение качества и совершенствование производства музыкальных инструментов: Сб. науч. тр. НИКТИМП – М., 1983. – С.3–35.

89. Пат. 2097165 РФ, МПК B22D25/00, B22C9/02, B22D21/00. Способ изготовления колокола.

90. Пат. 2588101 США, кл. 84–291. Musical instrument construction.

91. Пат. 4185534 США, МПК G10D3/02. Stringed musical instruments with foamed solid bodies.

92. Пат. 5333527 США, МПК G10D1/08. Compression molded composite guitar soundboard.

93. Пат. 5396823 США, МПК G10D3/00. Rib reinforced, integral guitar belly.

94. Пат. 5406874 США, МПК G10D3/00. Melamine sheet guitar.

95. Пат. 5469770 США, МПК G10D3/00. Distributed load sound board system.

96. Пат. 1235571 Франция, кл. g 10d.

97. Пат. 813-802 ФРГ, кл. 51с, 1/01.

98. Пат. 44-64842 Япония, МКИ G 10с 3/06.

99. Пат. 49-29448 Япония, МКИ G 10с 3/06.

100. Пат. 49-24686 Япония, МКИ G 10с 3/06.

101. Пат. 53-48085 Япония, МКИ G 10с 3/06.

102. *Писаренко Г.Г., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. – Киев: Наук. думка, 1971. –376 с.

103. *Плоткина Н.А.* Исследование флуктуаций огибающей переходного процесса как одного из критериев оценки качества

звучания музыкальных инструментов: Автореф. дис... канд. техн. наук/ ЛЭИС. – Л., 1965.

104. *Попов Б.Г.* Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 294 с.

105. *Порвенков В. Г.* Акустика и настройка музыкальных инструментов.– М.: Музыка, 1990. – 192 с.

106. *Порвенков В.Г., Кириллов А.В.* Объективные методы оценок качества скрипок// Теоретические и экспериментальные исследования в области производства музыкальных инструментов: Сб. науч. тр. НИИКТИМП – М., 1979. – С.69–84.

107. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций.– Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.

108. *Работнов Ю.Н.* Механика композитов// Кн. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – С.683–711 с.

109. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов/ *В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко, В.К. Присяжнюк* и др. – Киев: Вища школа, 1987. – 200 с.

110. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник/ *В.И.Мяченков, В.П.Мальцев, В.П.Майборода* и др.; под общ. ред. *В.И.Мяченкова*. – М.: Машиностроение, 1989.– 520 с.

111. Расчеты на прочность в машиностроении: В 3-х т. Т.3. Инерционные нагрузки. Колебания и ударные нагрузки. Выносливость. Устойчивость/ *С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев* и др. – М.: Машиностроение, 1959. – 1118 с.

112. *Рикардс Р.Б., Чате А.К.* Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко// Механика композитных материалов. – 1981. – № 3. – С.453–460.

113. *Римский-Корсаков А.В., Дьяконов Н.А.* Музыкальные инструменты: Методы исследований и расчеты. – М.: Мест. пром-сть, 1952. – 345 с.
114. *Римский-Корсаков А.В.* Исследование струнных музыкальных инструментов: Автореф. дис... д-ра. техн. наук / ЛТА. – Л., 1949.
115. *Русаков И.Г.* Роль формы и материала в скрипичном смычке инструментов// Сб. тр. НИИМП. – М., 1941. – Вып.3. – С.80–97.
116. Сборник научных программ на Фортране. Матричная алгебра и линейная алгебра. – М.: Статистика, 1974. – Вып.2. – 224 с.
117. *Светлицкий В.А., Стасенко И.В.* Сборник задач по теории колебаний. – М.: Высш. шк., 1973. – 452 с.
118. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Машиностроение, 1979. – 392 с.
119. *Смирнов В.А.* Численный метод расчета подкрепленных внутри контура ортотропных пластин// Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1983. – Вып.23. – С.272–280.
120. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 437 с.
121. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория МКЭ. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
122. *Стретт Дж.В. (Рэлей).* Теория звука: В 2 т. – М., 1955.
123. *Сухарев И.П.* Экспериментальные методы исследования деформаций и прочности. – М.: Машиностроение, 1987. – 216 с.
124. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

125. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – Гостехиздат, 1955. – 568 с.
126. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.
127. Тулузаков В.В. О логарифмическом декременте затухания резонансной древесины// Науч. тр. МЛТИ. – 1981. – Вып.131. – С.11–14.
128. Уголев Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения.– М.: Лесн. пром-сть, 1986. – 368 с.
129. Угольников Н.И. Акустический расчёт щипкового инструмента для основных частот деки и резонатора// Сб. тр. НИИМП. – М., 1938. – Вып.1. – С.112–121.
130. Федюков В.И. Ель резонансная: Отбор на корню, выращивание, сертификация.– Йошкар–Ола, 1998. – 204 с.
131. Физические величины: Справочник/ А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1231 с.
132. Шаповалов Л.А. Об одной форме представления уравнений линейной теории оболочек и пластин с учетом деформации поперечных сдвигов// Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 3. – С.167–178.
133. Шапочкин А.С., Кириллов А.В. Полимерные материалы в производстве музыкальных инструментов// Сб. науч. тр. Исследование свойств материалов для производства музыкальных инструментов. – М., 1981.
134. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
135. Шлычков С.В. Постановка задачи динамики музыкального струнного инструмента// Тр. МарГТУ. Йошкар-Ола.

Материалы 52-й межвуз. студ. науч.-техн. конф. – 2000. – Вып.7. – С.314–316.

136. *Шлычков С.В.* Оценка точности расчетной модели напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов музыкальных струнных инструментов// Исследовано в России. Электронный журнал. – 2000.– №18 – С.245–262. <http://zhurnal.apelarn.ru/articles/2000/018.pdf>

137. *Шлычков С.В.* Оценка точности расчетной динамической модели тонкостенных элементов музыкальных струнных инструментов. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2000. – 18 с. (Деп. в ВИНТИ 28.06.00; №1822–В00).

138. *Шлычков С.В.* Анализ резонансных свойств тонкостенных элементов музыкальных струнных инструментов // Исследовано в России Электронный журнал. – 2000. – №64.– С.924–942. <http://zhurnal.apelarn.ru/articles/2000/064.pdf>

139. *Шлычков С.В.* Математическая модель конструкции музыкальных струнных инструментов// Тез. докл. 1-й Рос. конф. молодых ученых по математическому моделированию. Калуга – М., 2000. – С.47–49.

140. *Шлычков С.В.* Расчетно-экспериментальное исследование резонансных свойств корпусных элементов музыкальных инструментов// Аэрокосмическая техника и высокие технологии – 2001: Сб. докл. Всерос. науч.-техн. конф. – Пермь, 2001. – С.304.

141. *Шлычков С.В.* Расчетно-экспериментальное исследование резонансных свойств корпусных элементов музыкальных инструментов// VIII Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике: Аннот. докл. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 2001. – С.612–613.

142. *Шлычков С.В.* Расчетно-экспериментальное исследование динамических свойств гитарной деки// Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – Т.7, №3. – С.389–400.

143. *Шлычков С.В.* Исследование динамических свойств звукоизлучающих элементов музыкальных струнных инструментов: расчет и эксперимент// Физическая акустика. Распространение и дифракция волн: Сб. тр. XI-й сессии Рос. акустического общества. – М.: Геос, 2001. – Т.1. – С.222–225.

144. *Шлычков С.В.* Влияние уровня демпфирования гитарной деки на ее амплитудно-частотную характеристику// Тр. Нижегородской акустической научной сессии. – Н. Новгород: Изд-во “ТАЛАМ”, 2002. – С.334–336.

145. *Шлычков С.В.* Влияние схемы подкреплений на динамическую реакцию гитарной деки // Акустические измерения и стандартизация. Аэроакустика. Геоакустика. Ультразвук и ультразвуковые технологии. Электроакустика: Сб. тр. XIII-й сессии Рос. акустического общества. – М.: Геос, 2003. – Т.2. – С.285–288.

146. Экспериментальная механика. В 2-х кн. Кн.1/ Под ред. *А. Кобаяси*. – М.: Мир, 1990. – 616 с.

147. Экспериментальная механика: В 2-х кн. Кн.2/ Под ред. *А. Кобаяси*. – М.: Мир, 1990. – 552 с.

148. *Янковский Б.А.* Исследование тембровых особенностей скрипок и разработка метода объективной оценки их качества: Отчёт экспериментальной фабрики щипковых музыкальных инструментов. – М., 1951.

149. Янковский Б.А. Методы объективной оценки качества звучания скрипок// Акустический журнал. – 1965 Т.2, №3. – С.269–286.
150. A handbook of finite element systems/ Edit. C.A. Brebbia – Southampton: CML Publ., 1981. – 490 p.
151. Aranowska E., Rogala T. The sound spectrum of upright pianos and its relation to the sound quality// Acta Acustica. – 1998. – Vol.84, № 1. – P.129–135.
152. Bretos J., Santamaria C., J. Alonso Moral. Vibrational patterns and frequency responses of the free plates and box of a violin obtained by finite element analysis// Journal Acoustic Society of America. – 1999. – Vol.105, № 3. – P.1942–1950.
153. Bissinger G. Acoustic normal modes bellow 4 kHz for a rigid, closed violin-shaped cavity// Journal Acoustic Society of America. – 1996. – Vol.100, № 3. – P.1835–1839.
154. Caldersmith G. Guitar as a reflex enclosure// Journal Acoustic Society of America. –1978. – Vol.63, № 5.– P.1566–1575.
155. Caldersmith G. Designing a guitar family// Applied acoustics. – 1995. – Vol.46, №1. – P.3–17.
156. Chladni E.F. Die Akustik. – Leipzig, 1802.
157. Elejabarrieta M. J., Ezcurra A., Santamaria C. Evolution of the vibrational behavior of a guitar soundboard along successive construction phases by means of the modal analysis technique// Journal Acoustic Society of America. – 2000. – Vol.108, № 1. – P.369–378.
158. Elejabarrieta M.J., Ezcurra A., Santamaria C. Coupled modes of the resonance box of the guitar // Journal Acoustic Society of America. – 2002. – Vol.111, № 5. – P.2283–2292.

159. *Gough C.* Science and Stradivari// Physics World. – 2000. – №4. – <http://physicsweb.org/article/world/13/14/8>
160. *Griffin S., Luo H., Hanagud S.* Acoustic guitar function model including symmetric and asymmetric plate modes// Acta Acustica. – 1998. – Vol.84, № 3. – P.563–569.
161. *Hohneman W., Hecht H.* Schallfelder und schallantennen II// Phys. Z. leipzig. – 1917. – № 18. – S.261–270.
162. *Huebner K.H.* The Finite Element Method for Engineers. Engineers Mechanics Department General Motors Research Laboratories. – New-York: John Wiley & Sons Ltd, 1975. – 444 p.
163. *Hutchins C.M.* The Physics of Violins// Scientific American. – 1962. – Vol.207, № 5. – P.34–50.
164. *Iguchi S.* Biegeschwingungen und Klangfiguren der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte// Ing.-Archiv. – 1937. – Bd.8, H.1. – S.36–48.
165. *Irons B.M., Ahmad S.* Finite element techniques. Ellis Horwood. – Chichester, 1980. – 529 p.
166. *Jansson E. V.* A study of acoustical and hologramm interferometric measurements of the top plate vibrations of a guitar // Acustica. – 1971. – Vol.25, № 1. – P.95–100.
167. *Jansson E. V.* Acustical properties of complex cavities. Prediction and measurements of resonance properties of violin-shaped and guitar-shaped cavities// Acustica. – 1977. – Vol.37, №4. – P.95–100.
168. *Kern E., Glautti P.* Die Beziehung zwischen Musiker und muzikinstrument in sinnesphysiologiescher// Sicht. HNU. – №22. – Ohne jahr. – S.297–308.
169. *Meyer J.* Zum Klangphanomen der altitlienischen Geigen// Acustica. – 1982.– Vol.51, № 1. – P.1–11.

170. *Moral J.A., Jansson E.V.* Eigenmodes, input admittance, and the function of the violin// *Acustica*. – 1982. – Vol.50. – P.329–337.

171. *Pichon A., Berge S., Chaigne A.* Comparison between experimental and predicted radiation of a guitar// *Acta Acustica*. – 1998. – Vol.84, № 1. – P.136–145.

172. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // *J. Math. and Phys.* – 1944. – Vol.23, № 4. – P.184–191.

173. *Richardson B. E.* The guitar: Its past, present and future// *Acoustic Bulletin*. – 1994. – № 3. – P.5–9.

174. *Rossing T. D., Eban G.* Normal modes of a radially braced guitar determined by electronic TV holography // *Journal Acoustic Society of America*. – 1999. – Vol.106, № 5. – P.2991–2996.

175. *Runnemalm M.* Operating Deflection Shapes of the Plates and Standing Aerial Waves in a Violin and a Guitar Model // *Acta Acustica*. – 2000. – Vol.86, № 5. – P.883–890.

176. *Saldner O.H., Molin N.E., Jansson E. V.* Vibration modes of the violin forced via the bridge and action of the sound-post// *Journal Acoustic Society of America*. – 1996. – Vol.100, №2. – P.1168–1177.

177. *Stress Analysis: Recent Developments in Numerical and Experimental Methods/ Edited by O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister.* – London–New–York–Sydney: John Wiley & Sons Ltd, 1965. – 470 p.

178. *Weaver W., Johnston P.* Structural dynamics by finite elements. – New Jersey: Prentice–Hall, 1987. – 592 p.

179. *Winckel F.* Die Akustik der Geige. – B.F. Voigt Verlag, Hamburg, 1967.

180. *Zinoviev, P.A., Ermakov Y.N.* Energy Dissipation in Composite Materials. – Lancaster Basel: Technomic Publishing Co., Inc., 1994. – 246 p.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Результаты тестирования

В приложении 1 приводятся дополнительные результаты решений задач статики, динамики и устойчивости пластинок, подтверждающие достоверность расчетной модели МКЭ.

Расчет параметров НДС

Квадратной пластинки со стороной $a = 0,4$ м, толщиной стенки $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Используются две модели материала:

- Изотропное тело ($E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$).
- Ортотропное тело ($E_1 = 20$ ГПа, $E_2 = 200$ ГПа, $\nu_{12} = 0,03$, $\nu_{21} = 0,3$, $G_{12} = 286,2$ ГПа).

1. Изгиб шарнирно-опертой пластинки сосредоточенной силой $P = 500$ Н (рис.П.1). Вычисляется нормальный прогиб w точки приложения силы P и максимальные значения изгибающих моментов M_1 и M_2 на площадках с нормальными x_1 и x_2 .

В табл.22 результаты расчетов сопоставляются с данными аналитического решения [126]. На рис. П.2 и рис.П.3 на примере ортотропной пластинки исследуется сходимость решений. При числе КЭ $N = 36$ решение МКЭ по перемещениям отличается от точного решения [126] менее, чем на 3%. Для обеспечения той же точности по усилиям и напряжениям следует увеличить число КЭ. Здесь точность 3% достигается при $N = 50$.

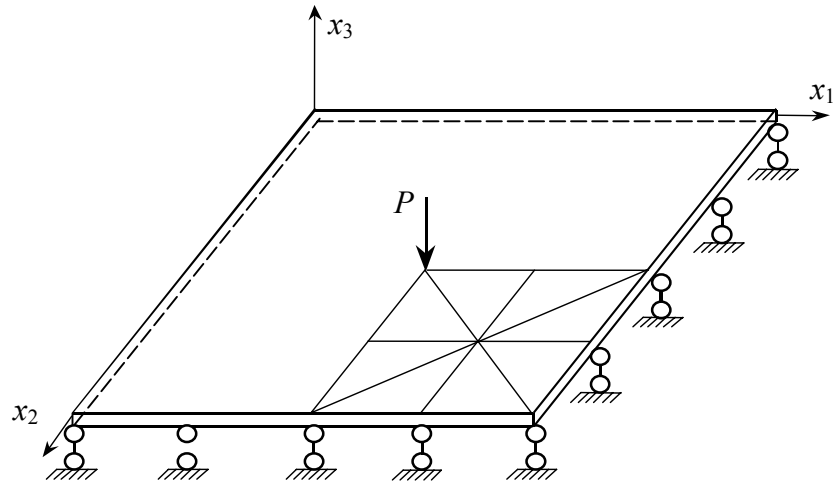
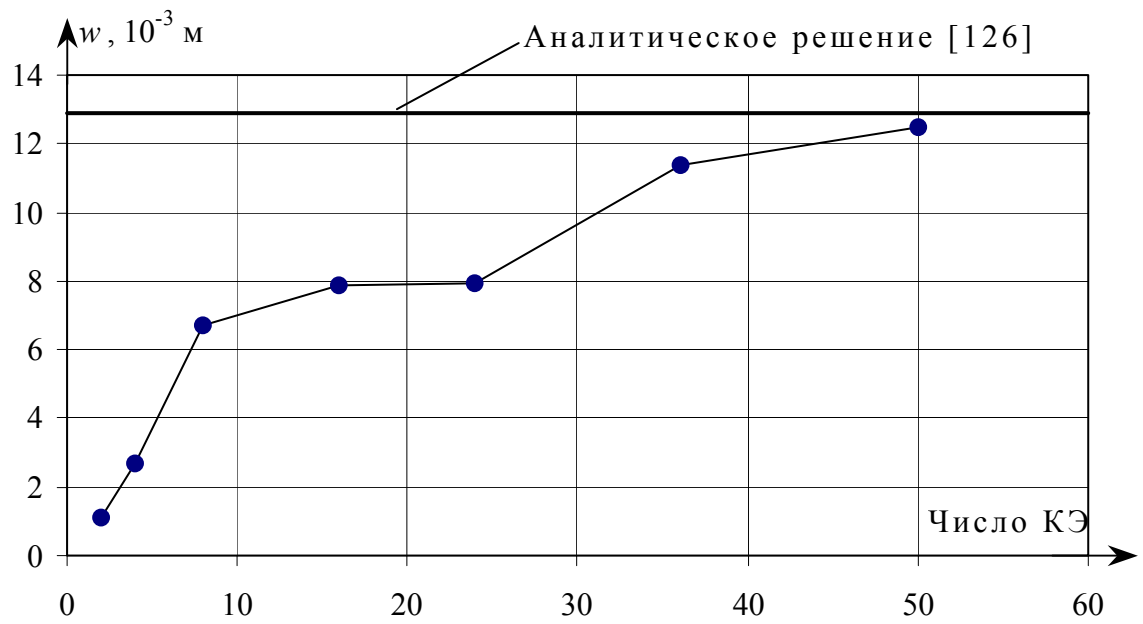
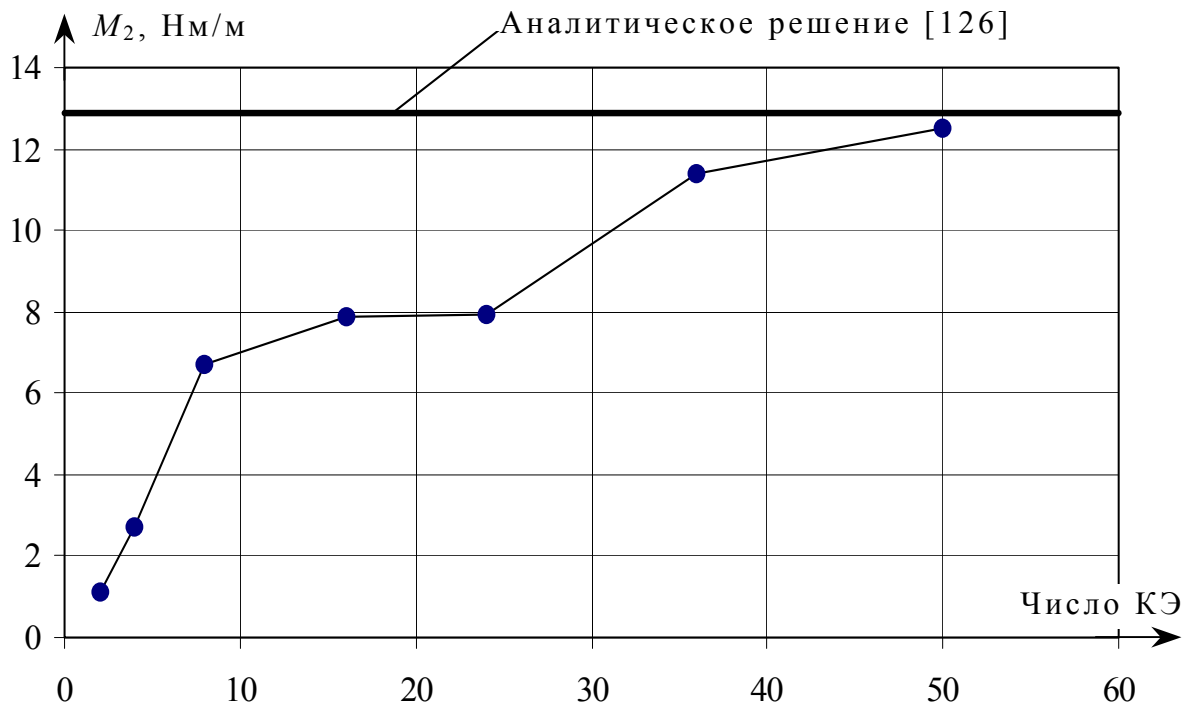


Рис.П.1. Пластика, шарнирно-опертая по контуру

Таблица 22

Число КЭ	Изотропное тело		Ортотропное тело	
	$w, \cdot 10^{-3} \text{ м}$	$M_1, \text{ Нм/м}$	$w, \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$M_2, \text{ Нм/м}$
2	1,47	1,1	0,382	1,1
4	3,26	1,4	0,833	2,7
8	5,07	3,9	1,23	6,7
16	5,42	4,5	1,32	7,9
24	5,52	5,1	1,33	7,92
36	6,11	6,7	1,39	11,4
50	6,27	6,9	1,4	12,5
Решение [126]	6,33	7,5	1,45	12,9

Рис.П.2. Зависимость прогиба w от числа КЭРис.П.3. Зависимость изгибающего момента M_2 от числа КЭ

2. Сжатие пластинки нагрузкой интенсивности $q = 0,225$ кН/м. Диаметр отверстия $d = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Используется нерегулярная конечно-элементная сетка (рис.П.4), область высоких градиентов напряжений разбивается на более мелкие КЭ.

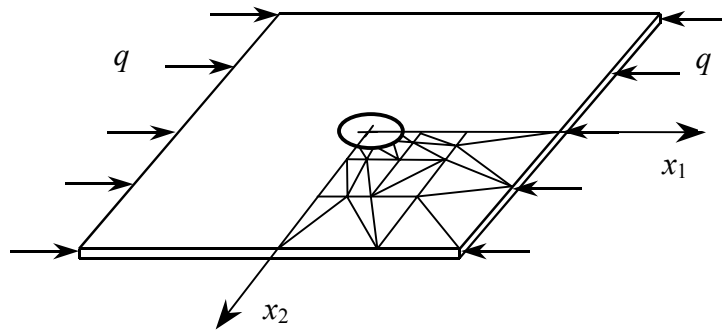


Рис.П.4. Расчетная схема пластинки

На рис.П.5 строится эпюра распределения вдоль оси x_2 продольных усилий N_1 . Результаты вычислений сопоставляются с данными аналитического решения [111] и решения МКЭ [47]. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с данными известных аналитического и численного решений.

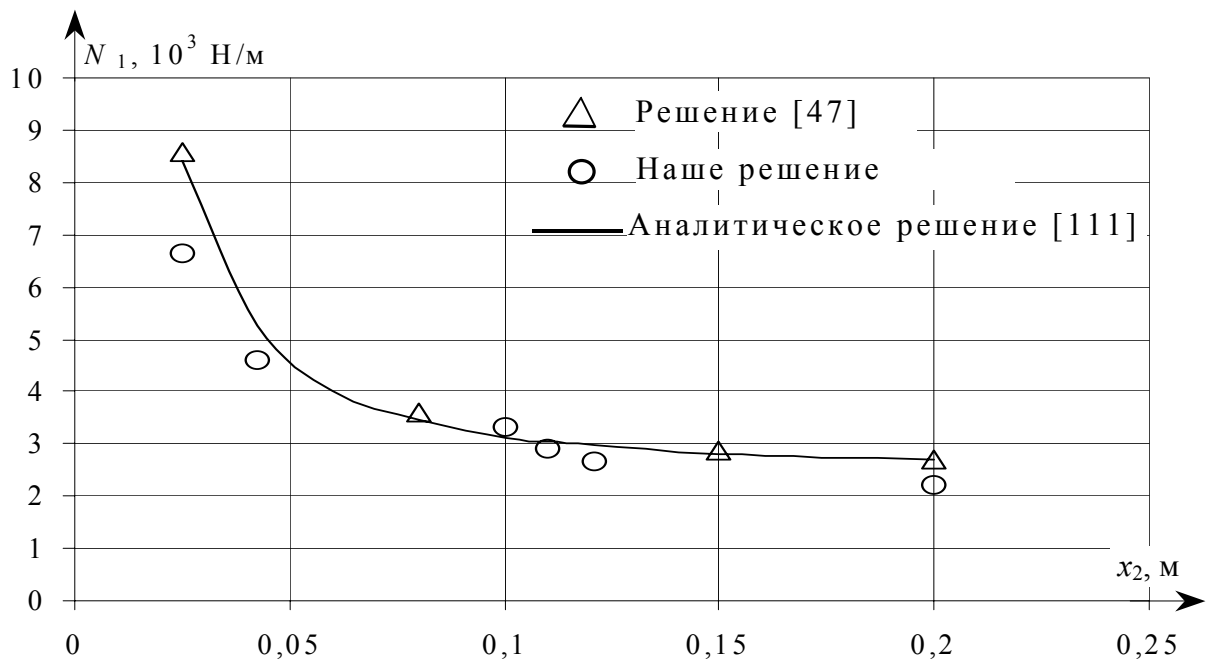


Рис.П.5. Эпюра распределения продольных усилий N_1

Расчет собственных частот

Квадратная пластинка со стороной $a = 0,4$ м и толщиной стенки $h = 10^{-2}$ м. Используется модель изотропного тела ($E = 198$ ГПа, $\nu = 0,3$). Плотность материала $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³. Сторона $x_1 = 0$ жёстко закреплена, три другие – шарнирно оперты по контуру. Применяется регулярная конечно-элементная сетка с числом КЭ $N = 256$.

В табл.23 расчетные коэффициенты α_j (формула (3.3) для первых 9 форм колебаний сопоставляются с аналитическим решением АМ [22]. Для первой собственной формы расчетный коэффициент α_1 отличается от аналитического решения [163] менее, чем на 0,8%. Для более высоких частот различие результатов расчета и решения АМ [22] не превышает 1%.

Таблица 23

M	n	Наше решение	Решение АМ [22]	Решение [163]
1	1	2,382	2,395	2,401
1	2	5,209	5,234	–
2	1	5,930	5,234	–
2	2	8,653	8,726	–
1	3	10,146	10,151	–
3	1	11,503	10,151	–
2	3	13,432	13,549	–
3	2	14,184	13,549	–
3	3	18,827	19,050	–

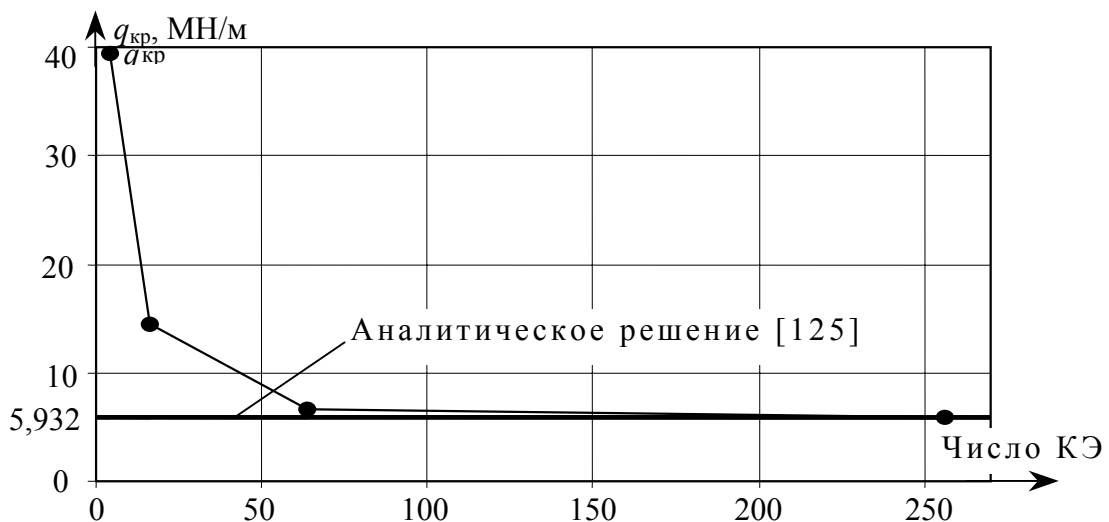
Расчет критических нагрузок

Квадратная пластинка со смешанными граничными условиями по контуру: на краях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ предполагаются жесткие заделки, на краях $x_1 = a$ и $x_2 = a$ - скользящие заделки. Имеет место двухосное сжатие в направлениях x_1 и x_2 нагрузкой интенсивности q .

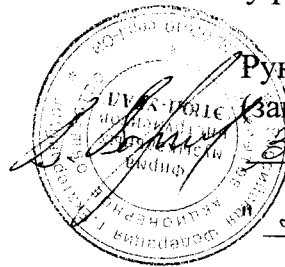
В табл.24 и на рис.П.6 результаты расчетов МКЭ сопоставляются с данными классических решений Тейлора и С.П. Тимошенко [125]. С увеличением числа КЭ имеет место сходимость численного решения к решениям [125]. При числе КЭ $N = 256$ относительная ошибка составляет около 0,1%.

Таблица 24

Число КЭ	$q_{кр}, \cdot 10^6 \text{ Н/м}$
4	39,438
16	14,524
64	6,647
256	5,938
Тейлор [125]	5,932
С.П. Тимошенко [125]	5,965

Рис.П.6. Зависимость критической нагрузки $q_{кр}$ от числа КЭ

УТВЕРЖДАЮ



Руководитель предприятия

(зам. руководителя)

Воробьев В.А. Фамилия И.О.30 " сентября 2002 г.

АКТ

о внедрении результатов кандидатской диссертационной работы

Шлычкова Сергея Владимировича

Комиссия в составе: председатель технический директор Орлов П.И.
 члены комиссии нат. тех. директора Сашков Р.А. нат. ОТК Лаврова Г.П.
 составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы
Анализ механических колебаний гитарной деки
 представленной на соискание ученой степени, использованы в проектно-
 конструкторской деятельности "ЗАО Этюд – Урал" в виде:

1. методики расчета динамических свойств деки акустической гитары с мензурой 650 мм;
2. экспериментальных данных по исследованию физико-механических свойств струн;
3. рекомендаций по улучшению качества звучания акустической гитары.

Использование указанных результатов позволило повысить качество и эффективность проектирования струнных музыкальных инструментов. При этом сократились затраты на проведение натурных испытаний.

Результаты внедрялись при выполнении НИР по теме:

"Разработка рекомендаций по улучшению качества звучания акустической гитары с мензурой 650 мм, снабженной гитарными струнами ("Стринг")"

Председатель комиссии Орлов П.И. Ф.И.Отчество

Члены комиссии Сашков Р.А. Ф.И.Отчество

Лаврова Г.П. Ф.И.Отчество

УТВЕРЖДАЮ



Проректор по учебной работе МарГТУ

В.Г. Самойленко

05

2004 г.

АКТ

**внедрения в учебный процесс научных разработок С.В. Шлычкова,
выполненных им в процессе подготовки диссертации на тему
"Методика расчета корпусных элементов музыкальных инструментов"**

Мы, нижеподписавшиеся сотрудники Марийского государственного технического университета, настоящим актом подтверждаем, что в учебный процесс специальности 260200 "Технология деревообработки" в содержание дисциплины "Основы автоматизированного проектирования изделий" и специальности 230100 "Эксплуатация транспорта и транспортного оборудования" в содержание дисциплины "Численные методы в инженерном деле" внедрены следующие научные результаты, полученные С.В. Шлычковым в процессе работы над кандидатской диссертацией:

- методика и программа расчета собственных форм и частот тонкостенных конструкций при помощи метода конечных элементов.
- результаты физического и математического моделирования механических колебаний резонансных дек музыкальных струнных инструментов.

АКТ ПОДПИСАЛИ:

Зав. каф. древесины и э/сертификации,

д.т.н., проф. _____

В.И. Федюков

Зам

Начальник УМУ, к.т.н., доц. _____

С.В. Казаринов